INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão

Notas teóricas e práticas de Matemática I

Edite Cordeiro

Departamento de Matemática

Reedição de um texto elaborado por Edite Cordeiro e Fátima Pacheco, no âmbito da unidade curricular de Matemática I, em 2006/2007

Conteúdo

Introdução

Estas notas destinam-se a servir de apoio à unidade curricular de Matemática I, leccionada no primeiro semestre, aos cursos de Contabilidade e de Gestão. Os principais objectivos de Matemática I prendem-se com o estudo dos assuntos tratados nos seguintes capítulos:
As notas são, em parte, uma reedição de um texto escrito em $2006/07$, também no âmbito da unidade curricular de Matemática I.
O Capítulo 1 é dedicado ao estudo das funções reais de uma variável real. Neste tema, já conhecido da maioria dos alunos alunos, vamos trabalhar conceitos básicos do cálculo aritmético e do cálculo algébrico. Naturalmente serão abordados os conceitos de limite continuidade e derivabilidade. Destacamos o estudo em particular das funções exponencial e logarítmica.
No Capítulo 2, damos o conceito de primitiva como o inverso da noção de derivada (antiderivada) e são abordadas técnicas de primitivação.

No Capítulo 3 é abordada a noção de matriz, suas operações e propriedades. Também é dado o conceito de determinante de uma matriz quadrada.
O Capítulo 4 trata de alguns métodos para a resolução de sistemas de equações lineares.
Cada capítulo apresenta uma última secção onde são propostos exercícios de aplicação, muitos dos quais serão resolvidos nas aulas práticas e teórico-práticas.
Chamamos à atenção para o facto de não haver nenhum meio de aprender matemática que não envolva a resolução de muitos exercícios.

Capítulo 1

Funções reais de uma variável real

Os principais objectos de estudo da Matemática são as funções. Neste curso, vamos orientar tal estudo para as aplicações práticas extraídas dos campos das ciências sociais.

1.1 Generalidades sobre funções de uma variável

O conceito de função como uma regra ou lei que nos diz como uma quantidade variável depende de outra, oferece-nos a prespectiva de compreender e correlacionar fenómenos naturais.

1.1.1 Funções e seus gráficos

Na prática, as funções surgem, com frequência, de relações algébricas entre variáveis. Comecemos por observar o seguinte exemplo:

Exemplo 1.1.1. *Consideremos que este ano, num certo supermercado, o preço do pão tem sofrido um aumento mensal de* 2 *euros e que no final de Outubro, cada pão custava* 64 *euros. Podemos traduzir esta situação pela equação* $y - 64 = 2(x - 10)$.

A equação anterior é equivalente a $y = 2x + 44$ e facilmente nos convencemos que a mesma nos dá o preço do pão em função do tempo. A tabela seguinte informa-nos dos objectos (valores assumidos pela variável independente) e correspondentes imagens:

Mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Preço	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68

Claro que o gráfico que representa a dependência funcional anterior está sobre uma recta. Vamos então definir as noções analítica e gráfica de uma função:

Definição 1.1.2. *Uma função f é uma correspondência que associa um só valor da variável y a cada valor da variável x. A variável x diz-se* variável independente *e pode tomar qualquer valor num certo conjunto de números reais, denominado* domínio de f. *Para cada valor de x no domínio de f, o valor correspondente de f é denotado por $f(x)$ tal que $y = f(x)$. A variável y diz-se* variável dependente *e o conjunto dos valores assumidos por y à medida que x varia no domínio , diz-se* imagem ou contradomínio *de f.*

Uma função real de uma variável real é uma função cujos dominio e o contradomínio estão contidos no conjunto dos números reais. As funções podem ser classificadas de injectivas ou não injectivas, de acordo com a seguinte noção:

Definição 1.1.3. *Uma função f diz-se* injectiva *se no seu domínio não existirem objectos diferentes com a mesma imagem, isto é, se $f(x) = f(y)$ implicar $x = y$.*

Exemplo 1.1.4. *A função $f(x) = x^3 - 4$ é injectiva, mas a função $g(x) = x^2 + 2$ não é injectiva. De facto,*

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow a^3 - 4 = b^3 - 4 \Leftrightarrow a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = b,$$

enquanto

$$g(a) = g(b) \Leftrightarrow a^2 + 2 = b^2 + 2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b.$$

Definição 1.1.5. *O gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x, y) no plano cartesiano, tal que x pertende ao domínio de f e $y = f(x)$.*

Devemos cultivar o hábito de, sempre que possível, pensar graficamente. Por exemplo, podemos verificar se uma função é injectiva através do seu gráfico, averiguando se existem ou não rectas horizontais que intersectam o gráfico em mais do que um ponto. O gráfico de uma função é a trajectória do ponto (x, y), quando ele se move no plano cartesiano, às vezes subindo, às vezes descendo em função da natureza da função considerada.

Dizemos que uma função é *contínua*, quando o seu gráfico não apresenta interrupções. As *descontinuidades* surgem essencialmente sob uma das seguintes formas:

- Uma função definida em diversos intervalos apresenta descontinuidades se os gráficos relativos a cada um desses intervalos não se ligam uns aos outros.

- Uma função definida por um quociente apresenta descontinuidade sempre que o seu denominador for nulo.

Funções pares e ímpares: Os conceitos de função par e função ímpar ajundam-nos em muitos casos no esboço gráfico de uma função. Consideremos, por exemplo, as funções

$$f(x) = x^2 - 4 \quad e \quad g(x) = x^3.$$

Algebricamente, facilmente concluímos que

$$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$$

e

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$$

Graficamente, também se observa que $f(-x) = f(x)$. Portando o gráfico de f é simétrico em relação ao eixo dos y, isto é, se o ponto (x, y) pertence ao gráfico, então o ponto $(-x, y)$ também pertence. Relativamente a $g(x)$, notamos que $g(-x) = -g(x)$, e consequentemente, o gráfico de g é simétrico em relação à origem.

Definição 1.1.6. *1. Uma função f é* par *se para todo o x do domíno de f, $-x$ também pertence ao domínio de f e $f(-x) = f(x)$.*

2. uma função f é ímpar *se para todo o x do domíno de f, $-x$ também pertence ao domínio de f e $f(-x) = -f(x)$.*

O número de funções distintas é claramente ilimitado, no entanto vamos classificar em algumas categorias aquelas que serão o nosso objecto de estudo.

Funções algébricas:

1. As *funções polinomiais* são definidas por polinómios e têm por domínio IR.

   As funções polinomiais seguintes são de grau 1, 2 e 3, respectivamente:

   $$f(x) = 3x - 2, \quad g(x) = 1 - 2x + x^2, \quad h(x) = x - x^3$$

   O gráfico de f é uma recta e o gráfico de g é uma parábola.

   O gráfico de funções polinomiais de grau superior a 2 é uma linha curva que poderá ser mais facilmente identificada com o conhecimento de certas propriedades da função que serão estudadas mais à frente. Experimente esboçar o gráfico de $h(x)$, através do conhecimento de alguns dos seus pontos, e em particular, dos seus zeros.

2. As *funções racionais* são definidas por quocientes de polinómios e o seu domínio é o conjunto de números reais tal que os denominadores não se anulam.

   Como exemplos de funções racionais, temos:

   $$f(x) = \frac{25 - x^2}{1 - x^2}, \quad g(x) = 2 + \frac{x}{x^2 + 4}, \quad h(x) = \frac{3}{x} + \frac{2}{5}.$$

   Note que $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, IR e $IR \setminus \{0\}$ são os domínios de f, g e h, respectivamente. Além disso, o gráfico de f tem descontinuidades em $x = 1$ e $x = -1$, o gráfico de g não tem descontinuidades e o gráfico de h tem uma descontinuidade em $x = 0$.

3. As *funções irracionais* são definidas por expressões algébricas com pelo menos um radical e o seu domínio é o conjunto de números reais para os quais a expressão algébrica tem significado.

   Como exemplos de funções irracionais, temos:

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad g(x) = 2 + \sqrt{x - 1}\,:$$

   Os domínios de f, g são respectivamente $[-5, 5]$ e $[1, +\infty[$.

   Funções transcendentes:

4. As *funções transcendentes* são aquelas que não são algébricas. As funções transcendentes que iremos estudar na secção seguinte, são as funções exponenciais e logarítmicas.

Mais à frente, vamos também estudar o cálculo diferencial, o qual fornece métodos para descobrir outros aspectos importantes do gráfico de uma qualquer função.

1.1.2 Álgebra de funções e composição de funções

Dadas duas funções f e g, podemos obter outras funções através das operações adição, subtracção, multiplicação, divisão ou composição das mesmas.

Por exemplo, dadas as funções

$$f(x) = x^2 - 2 \quad e \quad g(x) = \frac{-1}{2}x - 1,$$

consideramos

$$h(x) = f(x) + g(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - 1.$$

Definição 1.1.7. *Sejam f e g duas funções cujos domínios se intersectam. Definimos as funções $f + g$, $f - g$, $f.g$, e $\frac{f}{g}$ do seguinte modo:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Em cada caso, o domínio da função definida consiste da intersecção dos domínios das duas funções, à excepção do quarto caso, onde os valores para os quais $g(x) = 0$ são excluídos.

Dadas duas equações $y = t^2$ e $t = 2x - 5$, é possível escrever y em função de x pela substituição da segunda equação na primeira, obtendo $y = (2x - 5)^2$. Atendendo a que a equação $y = t^2$ define a função $f(t) = t^2$ e a equação $t = 2x - 5$ define a função $g(x) = 2x - 5$, então tem-se
$$y = f(t) = f(g(x)).$$
A equação $y = f[g(x)]$, obtida pelo "encadeamento"de f e g, define uma nova função h, chamada *composição* de f e g e é simbolizada por $h = fog$.

Definição 1.1.8. *Sejam f e g duas funções que satisfazem a condição de que pelo menos uma imagem de g pertence ao domínio de f. Então fog é a função definida pela equação $(fog)(x) = f[g(x)]$.*

Se denotarmos por D_f o domínio de uma função f, podemos indicar o domínio da função composta por:
$$D_{fog} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

Exemplo 1.1.9. *Sejam as funções*
$$f(x) = \frac{x}{x+3} \quad e \quad g(x) = \sqrt{x+2}.$$
Vamos caracterizar as funções $f - g$, $f.g$ e fog.

O domínio das funções $f - g$, $f.g$ é $[-2, +\infty[$, e são definidas por
$$(f - g)(x) = \frac{x}{x+3} - \sqrt{x+2} \quad e \quad (f.g)(x) = \frac{x\sqrt{x+2}}{x+3},$$
respectivamente.

Como $g(x) \in D_f$, para qualquer $x \in D_g$, o domínio da função fog também é $[-2, +\infty[$ e a sua expressão analítica é
$$fog(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+3}.$$

1.1.3 Funções inversas

Duas funções f e g dizem-se inversas se as compostas fog e gof resultarem na função identidade, isto é, se
$$fog(x) = x, \quad \forall x \in D_g$$
e
$$gof(x) = x, \quad \forall x \in D_f.$$
Por exemplo $fx) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$, para $x \geq 0$, são inversas uma da outra.

Definição 1.1.10. *Duas funções f e g dizem-se* inversas *se verificarem as seguintes condições:*

1. *A imagem de g está contida no domínio de f.*
2. *A imagem de f está contida no domínio de g.*
3. *Para qualquer $x \in D_g$, $fog(x) = x$.*
4. *Para qualquer $x \in D_f$, $gof(x) = x$.*

Denotamos a inversa de uma função f por f^{-1}. Geometricamente verificamos que duas funções são inversas quando o gráfico de uma é o simétrico do gráfico da outra, relativamente à recta $y = x$.

Exercício 1.1.11. *Verifique a simetria os gráficos da função $f(x) = 2x + 1$ e da sua inversa.*

Método algébrico para determinar f^{-1}:

1. Escrever a equação $y = f(x)$.
2. Resolver a equação em ordem a x, para obter $x = f^{-1}(y)$.
3. Trocar x por y na equação do passo anterior.

As noções de função e de inversa de uma função levam-nos a concluir que nem toda a função admite inversa. De facto, f^{-1} deve ser a única função cujo gráfico é o simétrico do gráfico de f, isto é, f deverá ser uma função injectiva.

Exemplo 1.1.12. *Seja a função injectiva $f(x) = x^3 - 8$ com domínio $\mathbb{R}$. Fazendo $y = x^3 - 8 \iff x^3 = y + 8 \iff x = \sqrt[3]{y+8}$, obtemos $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+8}$, cujo domínio também é $\mathbb{R}$.*

1.2 Funções exponenciais e logarítmicas

A funções algébricas não são suficientes para a aplicação da matemática às ciências sociais. As funções exponenciais são utilizadas, para projecções da população, na avaliação de investimentos, entre outras aplicações. A função logarítmica será abordada como a inversa da função exponencial.

1.2.1 Funções exponenciais

Definição 1.2.1. *Função exponencial é uma função da forma* $f(x) = a^x$, *onde* a *é uma constante positiva.*

Da definição de função exponencial, facilmente se conclui que a mesma tem domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}^+$.

Lembremos as seguintes leis dos expoentes:

1. Lei do produto: $a^r a^s = a^{r+s}$.

2. Lei do quociente: $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$.

3. Potência de potência: $(a^r)^s = a^{rs}$.

Representação gráfica das funções exponenciais:

A função exponencial é injectiva e monótona, isto é, varia sempre no mesmo sentido. Uma das aplicações práticas da função exponencial é o cálculo de *juros compostos*: Se investirmos P euros a uma taxa de juros anual r e os juros forem capitalizados k vezes por ano, o saldo $s(t)$ após t anos será

$$s(t) = P(1 + \frac{r}{k})^{kt} euros.$$

Exemplo 1.2.2. *Suponha que são aplicados* 1000 *euros a uma taxa de juros anual de* $0,06$. *O saldo após* 10 *anos, se os juros forem capitalizados mensalmente, é dado por*

$$s(10) = 1000(1 + \frac{0,06}{12}^{120}) = 1819,4$$

O número irracional e, cujo valor aproximado é de $2,718$ é a base da maioria das funções exponencias que iremos encontrar. Por exemplo, prova-se que o saldo $s(t)$ da quantia P a uma taxa de juros anual r se os juros forem *capitalizados continuamente*, é dado em função do tempo, por

$$s(t) = Pe^{rt}.$$

Exemplo 1.2.3. *Suponha que* 1000 *euros são aplicados a uma taxa de juros anual de* $0,06$. *O saldo após* 5 *anos, se os juros forem capitalizados continuamente, é dado por*

$$s(5) = 1000e^{0,3}.$$

Modelos exponenciais:

1. Diz-se que uma quantidade $q(t)$ que obedeça à lei $q(t) = q(0)e^{kt}$, onde $q(0)$ e k são constantes positivas, apresenta um *crescimento exponencial*.

2. Diz-se que uma quantidade $q(t)$ que obedeça à lei $q(t) = q(0)e^{-kt}$, onde $q(0)$ e k são constantes positivas, apresenta um *decrescimento exponencial*.

Se os juros forem capitalizados continuamente, vimos que o saldo bancário resultante $s(t) = Pe^{rt}$ também cresce exponencialmente.

A venda de certos produtos, quando são interrompidas as suas campanhas publicitárias, bem como o valor das máquinas após a sua aquisição, são quantidades que decrescem exponencialmente.

Exemplo 1.2.4. *Consideremos que uma máquina é desvalorizada com o tempo e após* t *anos o seu valor for dado por* $q(t) = q(0)e^{-0{,}04t}$. *Se após dois anos a máquina vale* 8.000 *euros, então o preço inicial foi de* $q(0) = 8000.e^{0{,}08}$ *euros.*

1.2.2 A função logaritmo natural

O gráfico da função exponencial $y = a^x$ revela que se trata de uma função injectiva que, por isso, admite inversa. De facto, a função inversa de $y = a^x$ chama-se *logaritmo de* y *na base* a e é representado por $log_a y$. Deste modo,

$$log_a y \Leftrightarrow y = a^x.$$

Exercício 1.2.5. *Porquê que para qualquer número positivo* a, *se tem* $log_a 1 = 0$*?*

Sendo a função logarítmo $y = \log_a x$ e a função exponencial $y = a^x$ inversas uma da outra, claro que o domínio e o contradomínio da função $y = \log_a x$ são, respectivamente, $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$. Portanto só existem logaritmos de números positivos.

Chamamos *logaritmos naturais* aos logaritmos na base e. Também a cada número positivo a corresponde um expoente b tal que $a = e^b$. O logaritmo natural b é representado por $\ln a$. Devido à importância da função exponencial e^x, os logaritmos naturais aparecem frequentemente em aplicações práticas.

Propriedades dos logaritmos:
Atendendo a que as funções $y = e^x$ e $y = \ln x$ são inversas uma da outra, à definição de logaritmo e às propriedades das potências, temos:

1. $e^{\ln x} = x$.
2. $\ln e^x = x$
3. $\ln(uv) = \ln u + \ln v$
4. $\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$
5. $\ln u^v = v \ln u$
6. $\log_b x = \log_a x \log_b a$.

Exemplo 1.2.6. *Resolva as seguintes questões, usando a definição de logaritmo e suas propriedades.*

1. *Se* $f(x) = \ln x$*, determine e simplifique* $f(\sqrt{e}) + f(e^3)$.
2. *Escreva como um único logaritmo* $\ln(2) - \frac{1}{3}\ln(16)$.
3. *Caracterize a inversa da função definida por* $f(x) = e^{3x-1} + 2$.

Solução.

1. $f(\sqrt{e}) + f(e^3) = \ln(\sqrt{e}) + \ln(\sqrt{e})^3 = \frac{1}{2}\ln(e) + \frac{3}{2}\ln(e) = 2\ln(e)$.
2. $\ln(2) - \frac{1}{3}\ln(16) = \ln(2) - \frac{4}{3}\ln(2) = -\frac{1}{3}\ln(2)$.
3. $D_f = \mathbb{R}$ e $CD_f = [2, +\infty[$, porque $e^{3x-1} > 0$, para qualquer valor de x.
   Além disso,
   $$e^{3x-1} + 2 = y \Leftrightarrow e^{3x-1} = y - 2 \Leftrightarrow 3x - 1 = \ln|y-2| \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(\ln|y-2| + 1).$$
   Então a função inversa f^{-1}, tem domínio $[2, +\infty[$, contradomínio $\mathbb{R}$ e é definida por
   $$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(\ln|-2| + 1).$$

□

1.3 Limites e continuidade de funções

Nesta secção apresentamos a ideia de limite de uma função que usaremos para estudar a noção de continuidade da função.

1.3.1 Sucessões numéricas - limite de uma sucessão numérica

A sucessão natural dos números $1, 2, 3, ..., n, ...$ é uma correspondência que a cada número natural associa o próprio número. Poderemos referir a sucessão dos números pares $2, 4, 6, ..., 2n, ...$, que a cada número natural associa o seu dobro.

Definição 1.3.1. *Uma* sucessão *de números naturais é uma função real de variável natural,* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(n)$ *ou* f_n*, sendo* n *a ordem do termo.*

De um modo geral a sucessão (u_n) é definida por uma *expressão analítica*, por exemplo
$$u_n = \frac{n+1}{n^2}$$
ou por uma *fórmula de recorrência*, por exemplo
$$v_1 = \sqrt{5} \quad \wedge \quad v_n = \sqrt{5 + t_{n-1}},\ n \geq 2.$$

Definição 1.3.2. *Uma sucessão* (u_n), converge *para* $a \in \mathbb{R}$ *(ou tem por limite* a*) se e só se para todo o número positivo* δ, *existe um número* p, *tal que:*

$$n > p \to |u_n - a| < \delta.$$

Uma sucessão que não é convergente diz-se *divergente*. Uma sucessão (u_n) convergente para zero diz-se um *infinitésimo*. Uma sucessão (u_n) diz-se um *infinitamente grande* se o conjunto dos seus termos não for majorado nem minorado, isto é, se $|u_n| \to \infty$.

Como exemplos de infinitésimos, temos $u_n = \frac{1}{n}$ e $v_n = 2^{-n}$. As sucessões $u_n = n$, $v_n = 2^n$ e $t_n = \sqrt{n}$ são exemplos de infinitamente grandes.

Sucessões monótonas:

1. Dizemos que uma sucessão é monótona crescente, em sentido lato, se para qualquer $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$.

2. Dizemos que uma sucessão é monótona crescente, em sentido restrito, se para qualquer $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$.

3. Dizemos que uma sucessão é monótona decrescente, em sentido lato, se para qualquer $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$.

4. Dizemos que uma sucessão é monótona decrescente, em sentido restrito, se para qualquer $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$.

Definição 1.3.3. *Uma sucessão* (u_n) *é limitada, se o conjunto dos seus termos é majorado e minorado, isto é:* (u_n) *é limitada* $\Longleftrightarrow$ *existe* $L \in \mathbb{R}^+$, *tal que para qualquer* $n \in \mathbb{N}, |u_n| < L$.

Exemplo 1.3.4. *A sucessão de termo geral*

$$u_n = \frac{3n-1}{4n+3}:$$

1. *É limitada, porque se* $L = 1$ *temos a condição universal em* $\mathbb{N}$*:*

$$|\frac{3n-1}{4n+3}| < 1 \Leftrightarrow |\frac{-n-3}{4n+3}| < 0 \Leftrightarrow n > -1$$

2. *É monótona crescente, porque*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3n-1}{4n+7} - \frac{3n-4}{4n+3} = \frac{25}{(4n+7)(4n+3)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. *Tem limite* $\frac{3}{4}$, *porque*

$$|u_n - \frac{3}{4}| = -\frac{13}{16n+12}$$

é um infinitésimo.

Propriedades 1.3.5. *1. Toda a sucessão monótona e limitada é convergente*

2. O limite de uma função, se existir, é único.

3. O inverso de um infinitésimo é um infinitamente grande.

4. O inverso de um infinitamente grande é um infinitésimo.

A sucessão de termo geral $(1+\frac{1}{n})^n$:
Prova-se que a sucessão $(1+\frac{1}{n})^n$ é monótona crescente e é limitada, por isso é convergente. O limite desta sucessão é por definição o número e,

$$\lim(1+\frac{1}{n})^n = e \approx 2,71828.$$

O seu valor aproximado pode ser determinado calculando sucessivos termos da sucessão. Prova-se também que

$$\lim_{u_n \to \infty}(1+\frac{x}{u_n})^{u_n} = e^x.$$

1.3.2 Limites de funções

A ideia de limite é fácil de ser captada intuitivamente. Por exemplo, se uma placa metálica quadrada se expande uniformemente quando aquecida e x é o comprimento do lado, então a área da placa é $A = x^2$. Quanto mais o x se avizinha de 3, tanto mais a área A tende para 9. Simbolicamente escrevemos

$$\lim_{x \longmapsto 3} x^2 = 9.$$

Vamos definir o conceito de limite de uma função num ponto, à custa da noção de limite de uma sucessão:

Definição 1.3.6. *Diz-se que uma função f, real de variável real, tende para um número b quando x tende para a se e só se toda a sucessão de valores de x, diferentes de a, convergente para a, corresponde uma sucessão de valores da função tendente para b. Escreve-se:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Por exemplo, a função identidade, $f(x) = x$, é tal que qualquer sucessão convergente para a, por valores diferentes de a,

$$x_1, x_2, ..., x_n, ... \to a$$

é transformada em si própria, e portanto

$$\lim_{x\to a} f(x) = a.$$

Limites laterais:

1. Diz-se que b é o limite à direita de a da função real de variável real f sse a toda a sucessão de valores de x maiores que a corresponder uma sucessão de valores da função tendente para b. Escreve-se:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b$$

2. Diz-se que b é o limite à esquerda de a da função real de variável real f sse a toda a sucessão de valores de x menores que a corresponder uma sucessão de valores da função tendente para b. Escreve-se:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b$$

3. Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$, então $\lim_{x\to a^-} f(x) = b = \lim_{x\to a^+} f(x)$.

4. Se $\lim_{x\to a^-} f(x) = b$ e $\lim_{x\to a^+} f(x) = c \neq b$, então não existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

Como a definição de limite de uma função depende do limite de uma sucessão, as propriedades comhecidas das sucessões, mantêm-se para as funções. Então:

Teorema 1.3.7. *1. O limite de uma função, se existir, é único.*

2. O limite de uma função constante é a própria constante.

São também consequência da definição de limite, as seguintes propriedades:
Propriedades dos limites:

1. $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.

2. $\lim_{x\to a}(f.g)(x) = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x)$.

3. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$.

4. $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$.

5. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$.

A aplicação das propriedades dos limites pode levar-nos a alguma das situações de *indeterminação*: $\infty - \infty, 0.\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ que deveremos ultrapassar no sentido de calcular esse limite.

Exemplo 1.3.8. *1.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x-3x^2}{x}=\lim_{x\to 0}5-3x=5$$

2.

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x-x^2}{5+8x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{8}=-\infty$$

3.

$$\lim_{x\to 3}\frac{9-x^2}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)(3+x)}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3}\frac{-3-x)}{(x-3)}=\frac{-6}{o}=\infty$$

1.3.3 Funções Contínuas

Diz-se que a função f é contínua no ponto de abcissa a se

$$\lim_{x\to a}f(x)=a$$

Continuidade à direita e à esquerda:

1. f é contínua à direita de a se $\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$
2. f é contínua à esquerda de a se $\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)$

Se uma função é contínua em a, então verifica a continuidade à esquerda e à direita de a.

Exemplo 1.3.9. *A função definida por*

$$\begin{cases} x^2 & se \quad x\le 1 \\ 3 & se \quad x>1 \end{cases}$$

embora descontínua em $x=1$ é contínua à direita de 1.

Vamos agora atender à noção de continuidade de uma função num dado intervalo do seu domínio.

Continuidade num intervalo:

1. Se f é contínua num intervalo aberto $]a,b[$, então f é contínua em todos os pontos do intervalo.
2. Se f é contínua em $]a,b]$, então f é contínua em $]a,b[$ e $\lim_{x\to b^-}f(x)=f(b)$.
3. se f é contínua em $[a,b[$, então f é contínua em $]a,b[$ e $\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$.
4. Se f é contínua em $[a,b]$, então f é contínua em $]a,b[$, $\lim_{x\to b^-}f(x)=f(b)$ e $\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$.

Consideremos as seguintes propriedades das funções contínuas num intervalo fechado:

Propriedades 1.3.10. 1. Teorema de Bolzano*: Se f é contínua em $[a, b]$ e k é um valor compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe um número $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = k$.*

2. Teorema de Weierstrass*: Toda a função contínua num intervalo fechado e não vazio tem nesse intervalo um máximo e um mínimo.*

O Teorema de Bolzano, também conhecido como *Teorema dos valores intermédios*, tem a seguinte consequência: Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e $f(a).f(b) < 0$, então a função admite pelo menos um zero no intervalo $]a, b[$.

Exemplo 1.3.11. *As soluções da equação $x = \frac{1}{1+x^2}$ são os zeros da função $f(x) = x - \frac{1}{1+x^2}$. Esta função é contínua em todo o seu domínio, o qual é $\mathbb{R}$. Podemos por isso aplicar o Teorema de Bolzano em qualquer intervalo fechado. Como $f(1) = \frac{1}{2}$ e $f(0) = -1$, então $f(1).f(0) < 0$, o que prova a existência de pelo menos uma raíz de f em $[0, 1]$.*

1.4 Noção de derivada e suas aplicações

A diferenciação é uma técnica matemática que possui grande variedade de aplicações, incluindo o traçado de curvas, a optimização de funções e a análise de taxas de variação.

1.4.1 Derivada de uma função - sua interpretação gráfica

Comecemos por usar o conceito de limite para determinar o declive da recta tangente ao gráfico de uma função num dado ponto. Sejam $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, dois pontos do gráfico da função $f(x)$. Como P e Q são pontos do gráfico de f, temos $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Claro que a recta PQ é uma recta secante ao gráfico de f e a sua equação é dada por

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Fazendo $x_2 = x_1 + h$, com h a ser uma quantidade tão pequena quanto queiramos, temos $Q = (x_1 + h, f(x_1 + h))$ a ser um ponto do gráfico da função f tão próximo de P quanto queiramos e a recta secante tenderá para a recta tangente ao gráfico da função no ponto P. Então o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto P é dado por

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Exemplo 1.4.1. *Consideremos a função $f(x) = 2x + x^2$. O* declive *da recta tangente ao gráfico da função f, no ponto $(1, 1)$ é dado por*

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(1+h) + (1+h)^2}{h} = 4.$$

A equação da recta tangente é $y = 4(x - 1) + 1$, ou equivalentemente, $y = 4x - 3$.

Definição 1.4.2. *Chamamos derivada da função $f(x)$ no ponto de abcissa x_0, $f'(x_0)$, ao coeficiente angular da tangente à curva $y = f(x)$ no ponto de tangência de abcissa x_0.*

Exemplo 1.4.3. *Consideremos ainda função $f(x) = 2x+x^2$. O declive da recta tangente ao gráfico da função f, num qualquer ponto (x, y) é dado por*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) + (h+x)^2) - (2x + x^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + 2xh + (x+h)^2}{h}.$$

Isto é $f'(x) = 2 + 2x$.

Fica então definida a noção de derivada de uma função:

Definição 1.4.4. *Chamamos* derivada *da função $f(x)$, à função*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

que, graficamente, representa o declive da recta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em cada ponto x.

Definição 1.4.5. *Uma função é diferenciavel num ponto de abcissa x se $f'(x)$ existir e for finita. Geometricamente significa que f tem uma recta tangente com declive $f'(x)$.*

A derivada de uma função $y = f(x)$ será denotada por

$$y', \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx} \quad ou \frac{df}{dx}.$$

Atendendo à interpretação gráfica da derivada de uma função, temos:

Propriedades 1.4.6. *1. Se uma função é diferenciável num ponto, então as suas derivadas laterais são iguais.*

2. Se uma função é diferenciável num determinado valor do seu domínio, então ela também é contínua.

No entanto uma função pode ser contínua num ponto e não ser diferenciavel. Por exemplo, a função $f(x) = |x|$ é contínua em $\mathbb{R}$, mas não é diferenciável em $x = 0$. de facto, as derivadas laterais $f'(0^+)$ e $f'(0^-)$ são 1 e -1, respectivamente.

1.4.2 Regras de derivação. Derivadas de ordem superior

Comecemos por determinar a derivada da função afim. Se $f(x) = ax + b$, então

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = a$$

Podemos estabelecer que se $f(x) = ax+b$, então a função derivada é dada por $f'(x) = a$. Também usando a definição de derivada, obtemos a derivada da função constante a ser zero e a derivada da função kx a ser k. Deste modo podemos obter as seguintes técnicas de derivação, aplicadas às funções f e g:

1. $(f+g)' = f' + g'$
2. $(f.g)' = f'.g + g'.f$
3. $(f^n)' = nf^{n-1}.f'$
4. $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$
5. $(a^f)' = f'.a^f.\ln a$, $a \in \mathbb{R}^+$
6. $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$

Exemplo 1.4.7. *1.*

$$(\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}})' = ((\frac{3-x}{x-1})^{1/3})' = \frac{1}{3}(\frac{3-x}{x-1})^{-2/3}\frac{-2}{(x-1)^2}$$

2.

$$(e^{x^3-3x})' = (3x^2-3)e^{x^3-3x}.$$

Derivada da função composta e derivada da função inversa:

Vamos de seguida determinar a derivada da função composta $f \circ g$ e a derivada da função inversa f^{-1}, caso estas existam.

Suponhamos que $y = (x^2 + 5x)^3$. Podemos calcular

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

usando a regra da potência:

$$\frac{dy}{dx} = 3.(x^2 - 5x)^2(2x - 5).$$

Outro método é fazermos $u = x^2 - 5x$, tal que $y = u^3$, $\frac{dy}{du} = 3u^2$, $\frac{du}{dx} = 2x + 5$. Então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 3u^2(2x+5) = 3.(x^2 - 5x)^2(2x - 5).$$

A legitimidade da igualdade

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

é garantida pelo teorema da derivada da função composta, também conhecido pela regra da cadeia:

Proposição 1.4.8. *Seja a função composta $f \circ g$ definida por $f \circ g(x) = f[g(x)]$. Então*

$$(f \circ g)'(x) = f'[g(x)].g'(x).$$

Consideremos agora as funções inversas $f(x) = x^3 \quad e \quad g(y) = \sqrt[3]{y}$. Como $x = g(y)$, então $\frac{dx}{dy} = g'y$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

logo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

Como $y = x^3$, então

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 = 3y^{2/3},$$

isto é,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3y^{2/3}},$$

desde que $y \neq 0$. Concluímos pois a regra da derivada da função inversa: Se

$$\frac{dy}{dx} \neq 0,$$

então

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx},$$

o que nos permite enunciar o teorema da função inversa:

Proposição 1.4.9. *Seja f uma função diferenciável no maior intervalo aberto do seu domínio e seja $f'(x) \neq 0$, para qualquer x desse intervalo. Então f tem uma inversa g, a qual é diferenciável e*

$$g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]}$$

Exemplo 1.4.10. *Se $f(x) = x^2, x > 0$, claro que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ e podemos calcular*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{2f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Diferenciação implícita:

Como já vimos, uma função real de variável real pode ser definida por uma equação de duas variáveis, por exemplo as equações

$$y = x^2 - 3x, \quad y^3 - 5x = 1, \quad e^y + 2x = 1, \quad x \ln y + e^x = 0.$$

No primeiro caso, dizemos que a função está definida explicitamente. Podemos tentar explicitar as funções, por exemplo $e^y + 2x = 1 \Leftrightarrow y = \ln(1 - 2x)$. Mas isto nem sempre é possível. Experimente explicitar a função definida pela equação $x \ln y + e^x = 0$.

Dada uma equação na qual se estabelece y implicitamente como uma função diferenciável de x, calcula-se $\frac{dy}{dx}$ do seguinte modo:

1. Derivar ambos os membros da equação em relação a x e usar a regra da cadeia ao derivar termos que contenham y (porque y é encarado como uma função de x)
2. Resolver a equação que contém as derivadas em ordem a $\frac{dy}{dx}$

Exemplo 1.4.11. *Vamos calcular o declive da recta tangente à curva* $x^2y^3 - 6 = 5y^3 + x$ *em* $x = 2$*. Derivando ambos os membros da equação em ordem a* x*, obtemos*

$$3x^2y\frac{dy}{dx} + 2xy^3 = 15y^2\frac{dy}{dx} + 1$$

e resolvendo a equação, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 15y^2}.$$

O ponto de tangência é $(2, y(2)) = (2, -2)$ *e o declive é dado por*

$$\frac{dy}{dx}(2, -2) = \frac{-11}{4}.$$

Derivada de ordem superior: A taxa de variação de uma função $f(x)$ em relação a x, é dada pela sua derivada $f'(x)$. Analogamente, a taxa de variação de uma função $f'(x)$ em relação a x, é dada pela sua derivada $f''(x)$.

Exemplo 1.4.12. *Se*

$$f(x) = \ln(x^2 - 1),$$

então

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

e

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

Como a derivada de uma função $f(x)$ é ainda uma função, podemos aplicar as regras da derivação sucessivamente e obter a derivada de ordem n, $f^{(n)}(x)$.

1.4.3 Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy

Uma das aplicações da noção de derivada é a localização dos zeros de uma função. Comecemos por enunciar o *Teorema de Rolle*:

Teorema 1.4.13. *Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, existe pelo menos um número c pertencente a $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Este teorema garante que o gráfico de f admite uma tangente horizontal num ponto interior de $]a, b[$. Como consequências do Teorema de Rolle, temos os seguintes corolários:

Corolário 1.4.14. *Se a e b são zeros de uma função contínua f no intervalo $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, então existe pelo menos um zero da derivada f' em $]a, b[$.*

Podemos enunciar, que entre dois zeros de uma função (contínua e diferenciável) há pelo menos um zero da derivada.

Corolário 1.4.15. *Se f é diferenciável num intervalo $I \subset [a, b]$ e se a e b são zeros consecutivos de f, então não pode haver mais do que um zero da derivada f em $]a, b[$.*

Devemos notar que, conjugando este resultado com o teorema de Bolzano para funções contínuas, podemos afirmar:

1. Se a função assumir valores de sinais contrários para dois zeros consecutivos da derivada, entre esses dois números existe um zero da função;

2. Se o sinal for o mesmo, não há zero algum da função entre os dois zeros da derivada.

Exemplo 1.4.16. *Vamos determinar o número de soluções da equação*

$$3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

e a sua localização gráfica. Comecemos por considerar a função contínua e diferenciável

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 1.$$

A sua derivada é

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 - 6x$$

e admite os zeros

$$\frac{-1}{2}, 0, 1.$$

Temos

$$f(\frac{-1}{2}) = \frac{11}{6} > 0; \quad f(0) = 1 > 0; \quad f(1) = -1 < 0.$$

Além disso,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Então, podemos concluir que:

- *em* $]0,1[$ *existe um zero da função;*
- *em* $]\frac{-1}{2},1[$ *não há nenhum zero da função*
- *em* $]1,+\infty[$ *existe um zero da função.*
- *em* $]-\infty,\frac{1}{2}[$ *não há nenhum zero da função.*

A partir do teorema de Rolle vamos estabelecer uma das mais importantes conclusões sobre as derivadas, que é o *Teorema de Lagrange* ou *Teorema do valor médio*.

Teorema 1.4.17. *Se* f *uma função contínua num intervalo fechado* $[a,b]$ *e diferenciável em* $]a,b[$*, então existe um número* c *pertencente a* $]a,b[$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

A fórmula

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

relaciona o acréscimo $f(b)-f(a)$ de $f(x)$ com o acréscimo $b-a$ da variável x, por isso o teorema de Lagrange também se chama teorema dos acréscimos finitos. Como consequências imediatas do teorema de Lagrange temos:

- Uma função f que tem derivada nula em todos os pontos de $]a,b[$ é constante nesse intervalo. Na verdade, se $x_1, x_2 \in]a,b[$, então

  $$f(x_2)-f(x_1) = (x_2-x_1)f'(c) = 0$$

  Logo

  $$f(x_2)-f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1).$$

- Duas funções com a mesma derivada diferem de uma constante. Com efeito, se $f'(x) = g'(x)$, então $f'(x)-g'(x) = 0$ e por isso $f(x)-g(x) = k$

- Se f admite derivada positiva em todos os pontos de $]a,b[$, é estritamente crescente nesse intervalo. Basta considerar $x_1, x_2 \in]a,b[$ e

  $$f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

  Como $f'(c) > 0$, então $f(x_2)-f(x_1)$ e x_2-x_1 têm o mesmo sinal, portanto a função é crescente.

- Se f admite derivada negativa em todos os pontos de $]a, b[$, é estritamente decrescente nesse intervalo.

Exemplo 1.4.18. *Vamos determinar os intervalos de monotonia da função* $f(x) = x^2e^x$*. Como* $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x(2x + x^2)$*, então:*

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

e

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0, 2[$$

Temos então que a função f *é monótona crescente em* $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ *e é monótona decrescente em* $]0, 2[$.

O *Teorema de Cauchy* relaciona os acréscimos de duas funções e é uma generalização do teorema de Lagrange.

Teorema 1.4.19. *Se* f *e* g *são duas funções contínuas em* $[a, b]$*, diferenciáveis em* $]a, b[$ *e se* $g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in]a, b[$ *então existe pelo menos um número* c *de* $]a, b[$ *tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Como uma consequência prática muito importante temos a *Regra de Cauchy*, que nos permite resolver indeterminações no caso dos limites de funções:

Teorema 1.4.20. *Sejam* f *e* g *funções diferenciáveis em* $]a, b[$*. Se*

$$g'(x) \neq 0, \quad g(x) \neq 0, \quad \forall x \in]a, b[, \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

e existir

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Facilmente se prova que este corolário também é aplicável nos seguintes casos:

- Se a variável $x \to \infty$, isto é,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)};$$

- Se a indeterminação for do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, seja a finito ou infinito;

- Se f' e g' tendem para 0, quando x tende para a, então

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Exemplo 1.4.21. *Vamos calcular*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log x}{x}\right)^2$$

Claro que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log x}{x}\right)^2=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}\right)^2$$

Além disso,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Logo,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log x}{x}\right)^2=0$$

1.4.4 Estudo de funções e problemas práticos de optimização

Vimos já que o sinal da função derivada f' nos permite determinar os intervalos de monotonia da função f. Vamos agora identificar os máximos e mínimos relativos de uma função e estudar um procedimento para os localizar.

Definição 1.4.22. *Uma função f possui um máximo relativo em $x = c$ se existir um intervalo aberto I que contém c, tal que f é definida em I e $f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in I$.*

Definição 1.4.23. *Uma função f possui um mínimo relativo em $x = c$ se existir um intervalo aberto I que contém c, tal que f é definida em I e $f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in I$.*

Realizamos a noção de extremo relativo como um ponto do gráfico da função onde a recta tangente é horizontal.

Definição 1.4.24. *Diz-se que um ponto c é ponto crítico da função f, quando f é definida em c mas não é diferenciável em c, ou $f'(c) = 0$*

Proposição 1.4.25. *Se uma função f possui um extremo relativo num ponto c, então c é um ponto crítico de f*

Proposição 1.4.26. *Seja uma função f definida e contínua no intervalo $]a, b[$ e diferenciável em $]a, b[$, excepto possivelmente em c.*

1. *Se $f'(x) > 0$, para todo o x em $]a, c[$ e $f'(x) < 0$, para todo o x em $]c, b[$, então f possui um máximo relativo em c.*

2. *Se $f'(x) < 0$, para todo o x em $]a, c[$ e $f'(x) > 0$, para todo o x em $]c, b[$, então f possui um mínimo relativo em c.*

A representação gráfica de uma função é facilitada pelo conhecimento do *sentido das concavidades* do mesmo.

- Dizemos que uma curva é côncava para cima se o declive das suas tangentes aumenta à medida que se percorre a curva da esquerda para a direita.

- Dizemos que uma curva é côncava para baixo se o declive das suas tangentes diminui à medida que se percorre a curva da esquerda para a direita.

Como a variação da função f' é dada pelo sinal da função f'', então temos o seguinte teste para a concavidade:

Proposição 1.4.27. 1. *Se $f''(x) > 0$ para $a < x < b$, então f é côncava para cima em $]a, b[$*

2. *Se $f''(x) < 0$ para $a < x < b$, então f é côncava para baixo em $]a, b[$*

Definição 1.4.28. *Diz-se que um ponto c é ponto crítico de segunda ordem da função f, quando f é definida em c mas não existe $f''(c)$ ou $f''(c) = 0$*

Facilmente se percebe que os pontos de inflexão do gráfico (pontos de mudança da concavidade) são os pontos críticos de segunda ordem.

Vamos então sumarizar os passos a considerar no traçado de gráficos de funções:

- Calcular f', determinar todos os pontos críticos de primeira ordem e representá-los graficamente.

- Calcular f'', determinar todos os pontos críticos de segunda ordem e representá-los graficamente.

- Dividir o eixo dos x em intervalos de acordo com os pontos críticos de primeira e de segunda ordem. Construir uma tabela para analisar o sinais da primeira e segunda derivadas em cada desses intervalos.

- Construir o gráfico em cada intervalo, de acordo com os dados da tabela.

Exemplo 1.4.29. *Consideremos a função*

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}.$$

A primeira derivada,
$$f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^3}$$
tem um zero no ponto $(1, f(1) = (1, \frac{1}{4})$. *Além a função não está definida em* $x = -1$. *Derivando novamente, temos*
$$f''(x) = \frac{2x-4}{(x+1)^4}.$$
O ponto crítico de segunda ordem correspondente é $(2, \frac{2}{9})$. *A seguinte tabela traduz o comportamento da função:*

Intervalo	$f'(x)$	$f''(x)$	*monotonia de* f	*concavidade de* f
$x < -1$	-	-	*decrescente*	*para baixo*
$-1 < x < 1$	+	-	*crescente*	*para baixo*
$1 < x < 2$	-	-	*decrescente*	*para baixo*
$x > 2$	-	+	*decrescente*	*para cima*

Usando a informação obtida em cada intervalo e atendendo à descontinuidade da função em $x = -1$, *facilmente chegamos ao gráfico.*

Os problemas de máximos e mínimos têm grande aplicação nas áreas da Gestão. Por vezes a função a maximizar tem significado prático apenas quando a variável independente é um número inteiro. Observemos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.4.30. *Um fazendeiro em um de Julho pode vender cada saca de batatas a* 200 *euros, verificando-se uma redução diária de* 2 *euros em cada saca, após esta data. O fazendeiro estima que em um de Julho tem* 80 *sacas e a produção aumentará de uma saca por dia. Quando deve o fazendeiro colher as batatas de modo a maximizar a receita?*

Claro que a resolução deste problema passa pela determinação do valor máximo da função receita, dada pelo produto do preço da saca no dia t *pelo número de sacas previstas para esse dia, isto é,*
$$r(t) = (200-2t)(80+t).$$
Atendendo a que se trata de uma função contínua e
$$r'(t) = -4t + 40,$$
então o valor máximo da receita ocorre quando $t = 10$ *(note que* $r'(t) > 0$ *quando* $t < 10$ *e* $r'(t) < 0$ *quando* $t > 10$*). O fazendeiro deve colher as batatas no dia 10 de Julho.*

Na maioria dos problemas práticos de optimização, o objectivo é calcular o máximo absoluto ou o mínimo absoluto de uma certa função num intervalo significativo. O *máximo absoluto* de uma função num intervalo é o maior valor da função nesse intervalo. O *mínimo absoluto* de uma função num intervalo é o menor valor da função nesse intervalo. Claro que se o intervalo em causa for fechado, então os extremos absolutos (máximo e mínimo) poderão ocorrer numa extremidade do intervalo.

Para calcular os extremos absolutos de uma função contínua f num intervalo fechado $[a, b]$ devemos atender ao seguinte:

- Calcular todos os pontos críticos de f em $[a, b]$.
- Calcular a imagem através de f, desses pontos críticos e das extremidades a e b.
- Seleccionar o maior e o menor valor obtido para $f(x)$. Estes serão o máximo absoluto e o mínimo absoluto, respectivamente.

Por exemplo, vamos calcular os extremos absolutos de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ em $[-3, 0]$. Temos $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$ e os pontos críticos ocorrem quando $x = -2$ e $x = 1$. Destes pontos, apenas $x = -2$ está no intervalo $[-3, 0]$. Calculamos:

$$f(-2) = 13, \quad f(-3) = 2, \quad f(0) = -7.$$

Comparando estes três valores concluímos que o máximo absoluto de f em $[-3, 0]$ é $f(-2) = 13$ e o mínimo absoluto é $f(0) = -7$.

1.5 Exercícios propostos

1. Supõe-se que a população de uma certa comunidade, daqui a t anos é de

$$p(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$$

milhares.

(a) Qual a população da comunidade, daqui a 9 anos?

(b) De quanto crescerá a população durante o 9^{o} ano?

(c) Ao longo desse tempo, o que acontece ao tamanho da população?

2. Nas alíneas seguintes, calcule os valores indicados para a função dada.

(a) $f(t) = (2t - 1)^{-3/2}, \quad f(1), f(5), f(3);$

(b) $f(x) = x - |x - 2|, \quad f(1), f(2), f(3);$

(c) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad x < -5 \\ x+1 & \text{se} \quad -5 \leq x \leq 5 \\ \sqrt{x} & \text{se} \quad x > 5 \end{cases}$, $\quad f(-6), f(-5), f(16)$;

3. Prove que $f(f(x)) = x$, quando $f(x) = 1 - x$.

4. Calcule $f(x+3)$, quando $f(x) = (2x+6)^2$.

5. Determine o domínio das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \sqrt{2x-6}$;

   (b) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$;

   (c) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-4}$;

   (d) $f(x) = |x-1|\,(x^2-9)^{1/2}$.

6. Considere as funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 4$.
   Determine $(f-g)(1)$, $\frac{f}{g}(1)$; $(f+g)(x)$; $(fg)(x)$ e $\frac{f}{g}(x)$.
   Indique o domínio das funções $f+g$, fg e $\frac{f}{g}$.

7. Considere as funções $f(x) = \sqrt{x-3}$ e $g(x) = 4x - 12$.
   Determine, caso exista, $(f \circ g)(1)$, $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(1)$, $(g \circ f)(x)$.
   Indique o domínio das funções compostas $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$.

8. Numa certa fábrica, o custo do fabrico de q unidades durante o horário de trabalho é de $c(q) = q^2 + q + 900$ euros. Nas primeiras t horas de produção de um dia normal de trabalho, fabricam-se $q(t) = 25t$ unidades.

   (a) Expresse o custo de fabrico em função de t.

   (b) Quanto terá sido o gasto na produção na 3ª hora?

   (c) Quando será que o custo de produção atinge 11.000 euros?

9. Verifique se as seguintes funções são pares ou ímpares e indique as implicações na sua representação gráfica:

   (a) $f(x) = |x| + 1$;

   (b) $g(x) = |x+1| - |x|$;

   (c) $h(x) = -x^3 + 5x$;

   (d) $j(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{2x^2+5}}$;

10. Prove que as funções f e g definidas por $f(x)\frac{3x-7}{x+1}$ e $g(x)\frac{7+x}{3-x}$ são inversas uma da outra.

11. Justifique se a função g definida por $g(x) = |x+2|$ é invertível.

12. Determine a inversa das seguintes funções, caso exista:

(a) $f(x) = -7x^3$; (b) $g(x) = \frac{x}{x-1}$; (c) $h(x) = x^2 - 3x + 2$.

13. Determine cada um dos seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} |1-2x|$; (c) $\lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$; (e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$;

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$; (d) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3}$; (f) $\lim_{x\to 1} \frac{1/\sqrt{x}-1}{1-x}$.

14. Determine a continuidade das seguintes funções, nos pontos indicados:

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & se \quad x \neq 3 \\ 6 & se \quad x = 3 \end{cases}$, em $x = 3$;

(b) $f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & se \quad x < 1 \\ -4 & se \quad x = -1 \\ \frac{x^2-2x-3}{x+1} & se \quad x > -1 \end{cases}$, em $x = -1$.

15. Determine o conjunto dos valores para os quais cada das seguintes funções é contínua:

(a) $f(x) = |x| - x$; (c) $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-1}$; (e) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$;

(b) $f(x) = \frac{|x|}{x}$; (d) $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$; (f) $f(x) = \frac{5(2x+1)}{4x^3-1}$.

16. Esboce no mesmo sistema de eixos os gráficos dos seguintes pares de funções:

(a) $f(x) = 3^x$ e $g(x) = 4^x$;

(b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ e $g(x) = (\frac{1}{4})^x$;

(c) $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-x}$.

17. Use as propriedades dos logaritmos e calcule:

(a) $\ln \sqrt{e}$; (c) $f(x) = e^{3\ln 2 - 2\ln 5}$; (e) $\frac{e^{\ln(x^2-4)}}{x+2}$;

(b) $e^{\ln 5}$; (d) $\ln \frac{e^3\sqrt{e}}{e^{1/3}}$; (f) $e^{-\ln(1/x)}$.

18. Resolva as seguintes condições, em ordem à variável x.

(a) $\log_4(x) = 3$; (c) $\log_x(7) = \frac{1}{2}$; (e) $3\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x) = 5$;

(b) $\log_x(4) = 0,4$; (d) $2 = e^{0,06x}$; (f) $\ln(x) = \frac{1}{3}(\ln(16) + 2\ln(2)$.

19. Caracterize a inversa das seguintes funções e esboce no mesmo plano cartesiano a função dada e a sua inversa.

(a) $f(x) = e^{-2x+1}$; (b) $f(x) = \ln(3x-2)$; (c) $f(x) = 2 - \ln(3x)$.

20. Nos problemas que se seguem, atenda às seguintes fórmulas:

    i) Se aplicarmos P euros a uma taxa de juros anual r e os juros forem capitalizados k vezes por ano, o montante $S(t)$ após t anos é dado por $S(t) = P(1+\frac{r}{k})^{kt}$ euros.

    ii) Se aplicarmos P euros a uma taxa de juros anual r e os juros forem capitalizados continuamente, o montante $S(t)$ após t anos é dado por $S(t) = Pe^{rt}$ euros.

    (a) Em quanto tempo uma quantia duplicará o valor, se investida a uma taxa de juros anual de $0,06$, capitalizados continuamente?

    (b) Em quanto tempo uma quantia duplicará o valor, se for investida a uma taxa de juros anual de $0,08$ e os juros forem capitalizados trimestralmente?

21. Determine o declive da recta tangente ao gráfico de cada uma das funções, no ponto indicado:

    (a) $f(x) = \sqrt{x}$ em $(9,16)$; (b) $f(x) = \frac{3}{x+2}$ em $(1,1)$.

22. O imposto anual pago pelo aluguer de determinada máquina x anos após 2000 é de $i(x) = 20x^2 + 40x + 600$. Qual foi a taxa de crescimento do imposto relativamente ao tempo, em 2004?

23. Esboce o gráfico das seguintes funções, analise a continuidade e, caso seja necessário, determine através do cálculo de $f'(x+)$ e de $f'(x--)$, quando f é diferenciável.

    (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & se \quad x \leq 2 \\ 6 & se \quad x > 2 \end{cases}$; (c) $f(x) = \begin{cases} |x+2| & se \quad x \neq 2 \\ 1 & se \quad x = 2 \end{cases}$.

    (b) $f(x) = 1 - |x-3|$;

24. Considere a função
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & se \quad x \leq 2 \\ 6 & se \quad x > 2 \end{cases}.$$
    Determine os valores de a e b para que $f'(1)$ exista.

25. Aplique as regras básicas para a diferenciação e indique a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + 1$; (d) $f(x) = (6x^2+7)^2$; (g) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+4x+1}$;

(b) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$; (e) $f(x) = (x^2-8)(\frac{2}{x}-1)$; (h) $f(x) = (3x+1)e^{-3x}$;

(c) $f(x) = \frac{2}{5x} - \frac{\sqrt{2}}{3x^2}$; (f) $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x^2-3x+2}$; (i) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^5-3}}{(x^2+3)^4}$.

26. Calcule a derivada das seguintes funções com o auxílio da regra da cadeia:

(a) $f(x) = (2x^4-x+1)^{-4}$; (b) $f(x) = \frac{1}{(4x+1)^5}$; (c) $f(x) = \sqrt{x^4-x^2+\sqrt{3}}$.

27. Considere as seguintes funções $y = f(x)$, definidas implicitamente. Calcule $y'(x)$, por diferenciação implícita.

(a) $xy^2 - x^2y + x^2 + 2y^2 = 0$; (c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$; (e) $e^{x/y} = 3xy^2$;

(b) $x^4y^3 - 3xy = 60$; (d) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6$; (f) $\ln\frac{x}{y} = x^3y^2$.

28. Mostre que $y = 5xe^{-4x}$ satisfaz a equação diferencial $y'' + 8y' + 16y = 0$.

29. Calcule a derivada de 2ª ordem das seguintes funções:

(a) $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$; (b) $f(x) = e^{1/x^2} + \frac{1}{e^{x^2}}$; (c) $f(x) = e^{\sqrt{x}}\ln\sqrt{x}$.

30. Esboce o gráfico de uma função $f(x)$ definida para todo o $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$.

31. Verifique se podemos aplicar o teorema do valor intermédio (teorema de Bolzano sobre continuidade) às seguintes funções, no intervalo indicado. Caso afirmativo determine esse valor.

(a) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, em $[0,3]$; (b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ em $[3,8]$.

32. Verifique se podemos aplicar o teorema do valor médio (teorema de Lagrange) às seguintes funções, no intervalo indicado. Caso afirmativo determine esse valor.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & se \quad x<1 \\ 3-x & se \quad x \geq 1 \end{cases}$. em $[0,3]$; (b) $f(x) = \sqrt{|x|}$ em $[-1,1]$.

33. Seja a função f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & se \quad x \leq 1 \\ 1+\ln x & se \quad x>1 \end{cases} .$$

Mostre que:

(a) $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$;

(b) $f(x)$ tem derivada finita em $\mathbb{R}$;

(c) Em nenhum intervalo real é aplicável o Teorema de Rolle.

34. Prove que a equação $\ln(x^2+1) = x$, tem no máximo duas raízes em $\mathbb{R}$.

35. O lucro P em euros, obtido pela produção de x toneladas de uma liga metálica, é dado por $P = 12.000x - 30x^2$. Quantas toneladas devem ser produzidas para maximizar o lucro?

36. Uma companhia de televisão pretende operar numa pequena cidade. Prevê-se que aproximadamente 600 pessoas subscrevem o serviço se o preço por assinante for de 5 euros por mês. A experiência mostra que cada 5 cêntimos de aumento no preço da subscrição individual, 4 das 600 pessoas iniciais decidirão não o subscrever. O custo da companhia, por mês de subscrição está estimado em $3,5$ euros. Qual o preço que trará maior lucro para a companhia?

37. Uma fábrica produz rádios por 5 euros cada e avalia que se cada rádio for vendido a x euros, os consumidores comprarão aproximadamente $1.000e^{-0,1x}$ rádios por semana. Qual deverá ser o preço unitário da venda dos rádios para maximizar o lucro?

38. Admitindo que o crescimento da população de um certo país segue a função $P(t) = \frac{160t}{1+8e^{-0,01t}}$ milhões de habitantes, qual o ano em que se verifica um maior aumento dessa população?

39. Seja a função definida por $f(x) = \ln(2 + \frac{1}{x})$.

(a) Determine o domínio da função.

(b) Prove que o ponto $(-1, 0)$ pertence ao gráfico da função.

(c) Prove que f é monótona decrescente em todo o seu domínio

(d) Prove que as rectas de equação $x = 0$ e $x = -1/2$ são assimptotas do gráfico da função.

(e) Esboce o gráfico da função.

40. Suponha que f e g são funções pares. Prove que $f + g$, $f - g$, $f.g$ e f/g também são funções pares.

41. Uma folha de papel dispõe de 18 centímetros quadrados para impressão de um jornal. As margens superior e inferior estão a 2 centímetros da extremidade correspondente ao papel. Cada margem lateral deve ser de 1 centímetro. Quais as dimensões da folha de papel para que a área total seja mínima?

1.5.1 Soluções

1. (a) $P(9) = 19,4$ milhares;
   (b) $P(9) - P(8) = 2,67$;
   (c) A população cresce.
2. (a) $f(1) = 1, f(5) = \frac{1}{27}, f(13) = \frac{1}{125}$.
   (b) $f(1) = 0, f(2) = 2, f(3) = 2)$.
   (c) $f(-6) = 3, f(-5) = -4, f(16) = 4$.
3.
4. $f(x+3) = 4x^2$.
5. (a) $\mathbb{D}_f =]-\infty, -2[\cup[2, +\infty[\setminus\{4\}$.
   (b) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
   (c) $\mathbb{D}_f = [3, +\infty[$.
   (d) $\mathbb{D}_f =]-\infty, -3[\cup[3, +\infty[$.
6. $f \circ g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $(f - g)(1) = 4$, $(f + g)(x) = \sqrt{x} + x^2 - 4$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}$, $\mathbb{D}_{f+g} = \mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{D}_{f\circ g} =]-\infty, -2[\cup[2, +\infty[$ e $\mathbb{D}_{\frac{f}{g}} = [0, +\infty[\setminus\{2\}$.
7. $f \circ g(x) = \sqrt{4x - 15}, g \circ f(x) = 4\sqrt{x-3} - 12, \mathbb{D}_{f\circ g} = [\frac{15}{4}, +\infty[, \mathbb{D}_{g\circ f} = [3, +\infty[$.
8. (a) $c \circ q(t) = 125t^2 + 25t + 900$.
   (b) $c \circ q(3) = 1359$ Euros.
   (c) Quando se tiverem fabricado 100 unidades.
9. f é par e , consequentemente, o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo dos yy, h e j são ímpares e os seus gráficos são simétricos em relação à origem, g não é par nem ímpar.
10.
11. Sim, $f^{-1}(x) = \left\{ \begin{array}{l} -2 + x \Leftarrow x \geq 0 \\ -2 - x \Leftarrow x < 0 \end{array} \right\}$.
12. (a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{-\frac{x}{7}}, \quad \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{D}'_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.
    (b) $g^{-1}(x) = g(x)$.
    (c) Não existe h^{-1}.

13. (a) 0. (b) 3. (c) $\frac{1}{4}$. (d) 4. (e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. (f) $\frac{1}{2}$.

14. (a) f é contínua em $x = 3$.
    (b) f não é contínua em $x = -1$.

15. (a) $\mathbb{R}$. (b) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. (c) $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. (d) $\mathbb{R}$. (e) $[-2, 2]$. (f) $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\sqrt[3]{4}}{4}\}$.

16.

17. (a) $\frac{1}{2}$ (b) 5 (c) $\frac{8}{25}$ (d) $\frac{19}{6}$ (e) $x - 2$ (f) x

18. (a) $x = 4^3$. (b) $x = 2^5$. (c) $x = 49$. (d) $x = \frac{ln2}{0{,}06}$. (e) $x = e^2$. (f) $x = 4$.

19. (a) $f^{-1}(x) = \frac{1+ln(x)}{2}, \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+, \mathbb{D}'_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.
    (b) $f^{-1}(x) = \frac{2+e^x}{3}, \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}, \mathbb{D}'_{f^{-1}} =]\frac{2}{3}, +\infty[$.
    (c) $f^{-1}(x) = \frac{e^{2-x}}{3}, \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}, \mathbb{D}'_{f^{-1}} =]0, +\infty[$.

20. (a) $t = \frac{ln(2)}{0{,}06}$ anos. (b) $t = \frac{log_{1{,}02}(2)}{4}$ anos.

21. (a) $m = \frac{1}{6}$. (b) $m = -\frac{1}{3}$.

22. $i'(4) = 200$.

23. (a) Função contínua, não diferenciável.
    (b) Função contínua, não diferenciável.
    (c) Função não contínua, não diferenciável.

24. $a = 2, b = -1$.

25. (a) $f'(x) = x^3 - x^2$.
    (b) $f'(x) = \frac{ln(x)-1}{ln^2(x)}$.
    (c) $f'(x) = -\frac{2}{5x^2} + \frac{2\sqrt{2}}{3x^3}$.
    (d) $f'(x) = 24x(6x^{2+7})$.
    (e) $f'(x) = 2 - 2x + \frac{16}{x^2}$.
    (f) $f'(x) = \frac{-9x^2+6x+5}{(x^2-3x+2)^2}$.
    (g) $f'(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x+1}$.
    (h) $f'(x) = -9xe^{-3x}$.
    (i) $f'(x) = \frac{5x^4}{3\sqrt[3]{(x^5-2)}^2(x^2+3)^4} - \frac{8x\sqrt[3]{x^5-3}}{(x^2+3)^5}$.

26. (a) $f'(x) = \frac{-32x^3+4}{2x^4-x+1}$. (b) $f'(x) = \frac{-20}{(4x+1)^6}$. (c) $f'(x) = \frac{2x^3-x}{\sqrt{x^4-x^2+\sqrt{3}}}$.

27. (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy-x^2+4y}{y^2-2xy+2x}$.

    (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^4y^2-3x}{4x^3y^3-3y}$.

    (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$.

    (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

    (e) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}-6xy}{\frac{-y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}-3y^2}$.

    (f) $\frac{dy}{dx} = \frac{-x-2x^4y^2}{1-3x^3y^3}$.

28.

29. (a) $f''(x) = \frac{e^{4x}+3e^{3x}+4e^{2x}}{(e^x+1)^2}$

    (b) $f''(x) = 9e^{\frac{1}{x^3}}\frac{1-4x^3}{x^8} - 2\frac{1-2x^2}{e^{x^2}}$

    (c) $f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}}\left[\frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}\right] + \frac{e^{\sqrt{x}}}{4x}\left[\frac{1-ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}-2e^{\sqrt{x}}}}{x}\right]$

30. O gráfico da função e^x.

31. (a) Sim. O ponto $x = 1$. (b) Não.

32. (a) Não, f não é diferenciável. (b) Não, f não é diferenciável.

33.

34.

35. 200 toneladas.

36. x representa o número de acréscimos de 5 cêntimos e a função lucro é dada por $L = (600-4x)(5+0,05x) - 3,5(600-4x)$. L tem um máximo em $x = 60$, logo o preço da assinatura que implica maior lucro para a empresa é dado por $P = 5 + 0,005 \times 60 = 8$ euros.

37. x representa o preço a que é vendido cada rádio e a função lucro é dada por $L = 1000e^{-0,1x}x - 5000e^{-0,1x}$. O preço de cada rádio de modo a optimizar o lucro é de $x = 15$ euros.

38. $t = \frac{1}{100}ln(0,625)$.

39. (a) $\mathbb{D}_f =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]0, +\infty[$;

40.

41. As dimensões da folha de papel deverão ser 6 e 3.

Capítulo 2

Técnicas de primitivação

Na Matemática Aplicada ocorre frequentemente conhecermos a derivada de uma função e desejarmos encontrar a função. Por exemplo, determinar a função lucro de um certo produto quando conhecemos a margem de lucro, ou conhecendo a taxa de inflação podemos querer obter estimativas de preço, no futuro. Numa das secções anteriores tratamos o problema das tangentes. Vamos agora estudar o problema inverso do das tangentes: dada a derivada da função, determinar a própria função.

2.1 Primitivação como o problema inverso de derivação

Ao processo de determinação de uma função a partir da sua derivada dá-se o nome de *primitivação*, *antidiferenciação* ou *integração indefinida*. Se f e g são funções tais que $g' = f$, dizemos que g é uma primitiva de de f. Por exemplo $g(x) = x^2$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$.
Notar que também a família de funções $h(x) = x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$. Isto, geometricamente, porque os gráficos de $h(x) = x^2 + c$ são obtidos por uma translação vertical do gráfico de $g(x) = x^2$ que não muda a inclinação da recta tangente para um dado valor de x.

Definição 2.1.1. *Uma função g diz-se uma* primitiva *de uma função f sobre um conjunto de números I, se $g'(x) = f(x)$ para todos os valores de x em I.*

Sabemos que qualquer função constante tem derivada nula, logo uma função constante é uma primitiva da função nula.

Proposição 2.1.2. *Se g é uma função tal que $g'(x) = 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto I, então g tem valor constante em I.*

Proposição 2.1.3. *Se g é uma primitiva da função f num intervalo aberto I, então a função h com domínio I é uma primitiva de f em I somente se $h = g + c$, para alguma constante c.*

Nota 2.1.4. *A notação $\int f(x)dx = g(x) + c$, significa que a função g é uma primitiva da função f, tal que $g'(x) = f(x)$ vale para todos os valores de x no domínio de f.*

Exercício 2.1.5. *Verifique que*

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c.$$

2.2 Primitivação imediata

Atendendo a que a integração indefinida (ou antidiferenciação) inverte a diferenciação, cada regra de diferenciação fornecerá uma regra correspondente para integração. Vamos observar algumas dessas regras:

1. $\int dx = x + c$
2. $\int f'(x)dx = f(x) + c$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
4. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$
5. $\int (f+g) = \int f dx + \int g dx$
6. $\int \frac{f'}{f} dx = \ln f + c$
7. $\int f' e^f dx = e^f + c$

Vamos agora observar algumas aplicações práticas das regras anteriores.

Exemplo 2.2.1.

$$\int (3e^x + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}x^2)dx =$$

$$3\int e^x dx + 2\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int x^2 dx =$$

$$3e^x + 2\ln x - \frac{1}{6}x^3 + C.$$

Exemplo 2.2.2. *Consideremos que a população de uma certa cidade varia segundo a taxa de* $2 + 6\sqrt{x}$ *pessoas por mês. Vamos determinar a população daqui a* 9 *meses, sabendo que a população actual é de 5000 pessoas.*
Daqui a x *meses, o número de elementos será dado por*

$$p(x) = \int (2 + 6\sqrt{x})dx = 2x + 4x^{3/2} + c$$

para alguma constante c*.*
Como $p(0) = 5000$*, então* $2(0) + 4(0)^{3/2} + c = 5000$*, ou* $c = 5000.$
Logo,

$$p(x) = 2x + 4x^{3/2} + 5000.$$

Exemplo 2.2.3.

$$\int (\frac{e^x}{3 + 2e^x} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2e^x}{3 + 2e^x} dx =$$

$$\frac{1}{2} ln(3 + 2e^x) + C.$$

Exemplo 2.2.4.

$$\int \frac{\sqrt{2 + lnx}}{x} dx =$$

$$\frac{2}{3} \int \frac{3}{2} (2 + lnx)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx =$$

$$\frac{2}{3} (2 + lnx)^{\frac{3}{2}} + C.$$

2.3 Algumas regras de integração

2.3.1 Primitivação por substituição

A técnica de primitivação por substituição é uma consequência do teorema da derivada da função composta. Por exemplo, a derivada da função

$$f(x) = (x^2 + 3x + 5)^9$$

é

$$f'(x) = 9(x^2 + 3x + 5)^8 (2x + 3)$$

e pode ser calculada, usando a regra da cadeia.
De facto, se $f(u) = u^9$ e $u(x) = x^2 + 3x + 5$, temos

$$(f \circ u)(x) = f'(u(x))u'(x) = 9(x^2 + 3x + 5)^8(2x + 3).$$

Considerando que $F(u)$ é a primitiva de $f(u)$, então

$$\int f(u)\frac{du}{dx}dx = F(u) + c$$

porque, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}[F(u)] = F'(u)\frac{du}{dx} = f(u)\frac{du}{dx}$$

Técnica da substituição:

Para integrar um produto da forma $f(u)\frac{du}{dx}$, onde um dos factores, $\frac{du}{dx}$, é a derivada de uma expressão u que aparece no outro factor, deve proceder-se do seguinte modo:

1. Determinar a primitiva $\int f(u)du$ do factor $f(u)$, em relação a u.

2. Substituir u, no resultado pela sua expressão na variável x.

De facto,

$$\int f(u)\frac{du}{dx}dx = \int f(u)du.$$

Podemos ainda aplicar este método nos casos em que, mesmo não tendo um produto na forma $f(u)\frac{du}{dx}$, o possamos obter por consideração de factores constantes.

Exemplo 2.3.1.

$$\int x^3 e^{x4} + 2dx = \frac{1}{4}\int 4x^3 e^{x4} + 2dx = e^{x4} + 2 + C$$

De facto,

$$4x^3 e^{x4} + 2 = f(u)\frac{du}{dx},$$

onde $f(u) = e^u$ *e* $u = x^4 + 2$.
Logo, pela regra da cadeia, temos

$$\int x^3 e^{x4} + 2dx = \frac{1}{4}\int f(u)du = \frac{1}{4}\int e^u du = \frac{1}{4}e^u + c = e^{x4} + 2 + C$$

Exemplo 2.3.2. *Para calcular* $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$ *faremos a mudança de variável* $\sqrt{1+x} = t$ *ou seja,* $x = t^2 - 1$. *Para tal* x, $dx = 2t$ *e temos:*

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx =$$

$$\frac{t^2-1}{t}2tdt =$$

$$\int t^2 - 1dt = \frac{t^3}{3} - t + C.$$

Regressando à variável x :

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx =$$

$$\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - 2(1+x)^{\frac{1}{2}} + C.$$

2.3.2 Primitivação por partes

Vamos agora descrever uma técnica de integração que se aplica a produtos $f(x)g(x)$ nos quais um dos factores é facilmente integrável e o outro pode ser simplificado por diferenciação. A técnica de primitivação por partes é consequência da regra de derivação do produto.

Derivando $f(x)G(x)$, onde G é uma primitiva de g, temos:

$$\frac{d}{dx}[f(x)G(x)] = f'(x)G(x) + f(x)G'(x).$$

Integrando em ordem a x obtemos:

$$f(x)G(x) = \int f'(x)G(x)dx + \int f(x)G'(x)dx.$$

ou

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x)dx - f(x)G(x)dx.$$

Devemos por isso considerar a seguinte técnica:

Técnica de primitivação por partes

$$\int f(x)g(x) = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx,$$

onde G é a primitiva de g.

Exemplo 2.3.3.
$$\int xe^x dx$$
No produto xe^{2x}, sabemos primitivar ambos os factores mas, por diferenciação, o factor x simplifica-se, enquanto que o factor e^{2x} não se simplifica. Optamos, por isso,por primitivar e^{2x}:
$$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}x - \int (\frac{1}{2}e^{2x})dx = \frac{1}{2}e^{2x}x - \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

Algumas vezes, a integração por partes resulta num novo integral, onde temos que voltar a aplicar a integração por partes. O exemplo seguinte mostra uma dessas situações:

Exemplo 2.3.4. *Vamos calcular*
$$\int x^2e^x dx.$$
No produto x^2e^x sabemos primitivar ambos os factores mas, por diferenciação, o factor x^2 desce de grau, enquanto que o factor e^x não se simplifica. Optamos por isso, por primitivar e^x:
$$\int x^2e^x dx = e^x x^2 - \int 2xe^x = e^x x^2 - (2xe^x - \int 2e^x) = e^x x^2 - 2xe^x + 2e^x + C.$$

2.3.3 Primitivação de fracções racionais

Tal como já definimos, uma função racional é uma função h dada por $h(x) = P(x)/Q(x)$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polonómios e $Q(x)$ não é o polinómio nulo. Nesta secção, vamos aprender a determinar o integral de uma função racional expandindo-a numa soma de funções racionais simples, chamadas *fracções parciais*, e de seguida determinar os integrais destas fracções parciais. Começamos por observar que se a fracção $P(x)/Q(x)$ é tal que o grau do numerador $P(x)$ é maior ou igual que o grau do denominador $Q(x)$), podemos dividir $P(x)$ por $Q(x)$, obter um quociente $f(x)$ e um resto $R(x)$ de grau inferior ao grau de $Q(x)$. Podemos, neste caso, escrever:
$$\int h(x)dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int (f(x) + \frac{R(x)}{Q(x)})dx = \int f(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx.$$
Uma vez que $f(x)$ é um polinómio, o problema reside apenas no cálculo de
$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx,$$
onde a fracção $R(x)/Q(x)$ é *própria* no sentido de que o grau do denominador é maior que o grau do denominador. Vamos agora discutir os vários casos:

Caso em que o denominador é um produto de factores lineares distintos

Se considerarmos a soma das fracções

$$\frac{2}{x-2} \quad e \quad \frac{3}{x+1},$$

obtemos

$$\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+1} = \frac{5x-4}{(x-2)(x+1)}.$$

Então

$$\int \frac{5x-4}{(x-2)(x+1)}dx = \int \frac{2}{x-2}dx + \int \frac{3}{x+1}dx = 2\ln|x-2| + 3\ln|x+1| + c.$$

Para a decomposição de uma fracção racional em fracções parciais, no caso em que o denominador é um produto de factores lineares é necessário determinar uma fracção parcial da forma

$$\frac{k}{ax+b},$$

para cada um dos factores lineares. Por exemplo, vamos decompor a fracção

$$\frac{5x-4}{(x-2)(x+1)}$$

na forma seguinte:

$$\frac{5x-4}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{b}{x+1}.$$

Para determinar as constantes das fracções parciais usamos o método da *igualdade dos coeficientes*. Este método consiste em considerar uma igualdade sem denominadores, equivalente à de cima (procurando um denominador comum). Para o exemplo considerado, obtemos

$$5x-4 = A(x+1) + B(x-2) \Leftrightarrow 5x-4 = (A+B)x + (A-2B).$$

Igualando os coeficientes de mesma potência de x em ambos os membros, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 5 = A + B \\ -4 = A - 2B \end{cases}$$

cuja solução é $A = 2$ e $B = 3$. Consequentemente,

$$\frac{5x-4}{(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+1}.$$

Claro que o sistema a resolver terá tantas mais incógnitas quantos mais factores lineares fizerem parte da decomposição do polinómio denominador.

Caso em que o denominador possui factores lineares repetidos
Se o denominador da fracção a decompor contiver um factor da forma $(ax+b)^k$, onde $k > 1$, é necessário considerar a soma de k fracções parciais correspondentes da forma

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + ... + \frac{A_k}{(ax+b)^k}.$$

Exemplo 2.3.5. *Vamos decompor a fracção*

$$\frac{3x^2+4x+2}{x(x+1)^2},$$

em cujo denominador consta o factor $x+1$ *duas vezes. Devemos considerar a igualdade*

$$\frac{3x^2+4x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

Pelo método da igualdade dos coeficientes, obtemos

$$3x^2+4x+2 = A(x+1)^2 + B_1x(x+1) + B_2x$$

ou

$$3x^2+4x+2 = Ax^2 + 2Ax + A + B_1x^2 + B_1x + B_2x$$

o que equivale ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 3 = A + B_1 \\ 4 = 2A + B_1 + B_2 \\ 2 = A \end{cases}$$

cuja solução é $A = 2$*,* $B_1 = 1$ *e* $B_2 = -1$*. Podemos agora determinar:*

$$\int \frac{3x^2+4x+2}{x(x+1)^2}dx = \int (\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2})dx = -\frac{2}{x} + \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c.$$

2.4 Exercícios propostos

1. Determine uma função $y = f(x)$, tal que:

(a) $\frac{dy}{dx} = 2x(x^2-1)$; (b) $\frac{dy}{dx} = x^2(x^3-2)^6$; (c) $\frac{dy}{dx} = x^5 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$;

2. Calcule a primitiva indicada e comprove as respostas obtidas, derivando-as.

   (a) $\int x^{3/2}dx$; (d) $\int(3x^2-5x+2)dx$; (g) $\int \frac{x+1}{x^3}dx$;

   (b) $\int \frac{1}{x^2}dx$; (e) $\int \frac{1}{1+2x}dx$; (h) $\int \frac{x^2+3x-2}{\sqrt{x}}dx$;

   (c) $\int \sqrt{x}dx$; (f) $\int(\frac{1}{2x} - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{\sqrt{x}})dx$; (i) $\int x^3(2x+\frac{1}{x})dx$

3. Estima-se que daqui a t meses, a população de uma certa cidade variará à taxa de $4+5t^{2/3}$ pessoas por mês. Se a população actual é de 10.000 pessoas, qual será a população daqui a 8 meses?

4. Foi transplantada uma árvore e, após x anos, cresce a uma taxa de $1+\frac{1}{(x+1)^2}$ metros por ano. Após 2 anos, alcançou 5 metros de altura. Qual era a sua altura quando foi transplantada?

5. Calcule as seguintes primitivas:

   (a) $\int x\sqrt{3x^2+1}dx$; (d) $\int \frac{2+3x}{\sqrt{1+4x+3x^2}}dx$; (g) $\int \frac{2x\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx$;

   (b) $\int x^2(1-4x^3)^{1/5}dx$; (e) $\int \frac{\ln(x^2)}{x}dx$; (h) $\int x^5e^{1-x^6}dx$;

   (c) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^{1/4}}{\sqrt{x}}dx$; (f) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; (i) $\int(3x^2-1)e^{x^3-x}dx$.

6. Use a integração por partes e calcule:

   (a) $\int xe^{-x}dx$; (d) $\int x(x+1)^8dx$; (g) $\int x^3(x^2-1)^{10}dx$;

   (b) $\int(3-2x)e^{-x}dx$; (e) $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$; (h) $\int x^3e^{x^3}dx$;

   (c) $\int x\ln(x^2)dx$; (f) $\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx$; (i) $\int x(\ln x)^2dx$.

7. As estatísticas estimam que daqui a x anos, o número de prisioneiros de uma penitenciária aumentará a uma taxa de $280e^{0,2x}$ prisioneiros por semana. Actualmente existem 2.000 prisioneiros nesta penitenciária. Quantos prisioneiros lá estarão daqui a 10 anos, aproximadamente?

8. Expresse cada uma das seguintes funções racionais impróprias como a soma de um polinómio e uma função racional própria, e de seguida integre:

   (a) $\int \frac{12x-17}{(x-1)(x-2)}dx$; (c) $\int \frac{10-2x}{x^2+5x}dx$; (e) $\int \frac{16x^2+3x-7}{x^3-x}dx$;

   (b) $\int \frac{14x-12}{2x^2-2x-12}dx$; (d) $\int \frac{9x^2-24x+6}{x^3-5x^2+6x}dx$; (f) $\int \frac{6x^2-9x+9}{x^3-3x^2}dx$.

9. Calcule afunção $f(x)$ tal que:

(a) $f'(x) = (1+x^2)(2-x)$ e $f(0) = 1$;

(b) $f'(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x-1})$ e $f(2) = 1$;

(c) $f'(x) = (e^2 + 3x^2 - 2e^{3x}$ e $f(0) = 3$.

10. Indique qual das seguintes famílias de funções representam $\int \ln(x)dx$:

(a) $f(x) = \frac{1}{x} + c$; (b) $f(x) = x\ln(x) - x + c$; (c) $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$.

11. O preço de revenda de uma certa máquina decresce a uma taxa que varia com o tempo de uso. Estima-se que a taxa de variação do seu valor após t anos de uso é dada por $-960e^{-t/5}$ euros por ano. Se a máquina foi comprada nova por 5.000 euros, quanto valerá 10 anos depois?

12. Calcule $\int x^3\ln(x^2)dx$.

13. Expresse a função $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ como a soma de um polinómio e uma função racional própria, e de seguida integre.

14. Determine qual das seguintes familias de funções representam $\int x\sqrt{x+1}dx$.

(a) $\frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + c$;

(b) $\frac{1}{3}x^2(x+1)^{3/2} + c$;

(c) $\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c$.

2.4.1 Soluções

1. (a) $f(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)^2 + c$

   (b) $f(x) = \frac{1}{21}(x^3-2)^7 + c$.

   (c) $f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 4x + c$.

2. (a) $\frac{2}{5}x^{5/2} + c$;

   (b) $\frac{2}{5}x^{5/2} + c$;

   (c) $-\frac{1}{x} + c$;

   (d) $\frac{2}{3}x^{3/2} + c$;

   (e) $x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + c$;

   (f) $\frac{1}{2}\ln|1+2x| + c$;

   (g) $\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{x^2} + 6\sqrt{x} + c$;

   (h) $-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c$;

(i) $\frac{2}{5}x^{5/2} + 2x^{3/2} - 4x^{1/2} + c$;

(j) $\frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + c$.

3. 10128

4. 9

5. (a) $\frac{1}{9}(3x^2 + 1)^{3/2} + c$;

   (b) $\frac{-5}{72}(1 - 4x^3)^{6/5} + c$;

   (c) $\frac{8}{5}(1 + t)^{5/4} + c$

   (d) $\sqrt{1 + 4x + 3x^2} + c$;

   (e) $\frac{1}{4}\ln^2(x^2) + c$;

   (f) $\ln(\ln x) + c$;

   (g) $\frac{1}{2}\ln^2(x^2 + 1) + c$;

   (h) $\frac{1}{6}e^{1-x^6} + c$;

   (i) $e^{x^3 - x} + c$.

6. (a) $-e^{-x}(x + 1) + c$;

   (b) $-e^{-x}(3 - 2x) + 2e^{-x} + c$;

   (c) $\frac{x^2}{2}\ln x^2 - \frac{x^2}{2} + c$

   (d) $\frac{1}{9}x(x + 1)^9 - \frac{1}{90}(x + 1)^10 + c$;

   (e) $\ln x \ln(x^2) - \ln^2 x + c$;

   (f) $\frac{-1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$;

   (g) $\frac{1}{22}x^2(x^2 - 1)^11 - \frac{1}{132}(x^2 - 1)^12 + c$;

   (h) $\frac{1}{2}e^{x^2}x^2 - e^{x^2} + c$;

   (i) $\frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{4}x^2 + c$.

7. $1400e^2 + 600$.

8. (a) $x + 1 + \frac{1}{x-1}$; $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x - 1| + c$.

   (b) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{4}{27} + \frac{8}{27}\frac{1}{3x+2}$; $\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{27}x + \frac{8}{81}\ln|3x + 2| + c$.

   (c) $x - \frac{x}{x^2+1}$; $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| + c$.

9. (a) $5\ln|x - 1| + 7\ln|x - 2| + c$;

   (b) $6\ln|x - 3| + 8\ln|x + 2| + c$;

(c) $2\ln|x| - 4\ln|x+5| + c$;
(d) $\ln|x| + 5\ln|x-3| + 3\ln|x-2| + c$;
(e) $7\ln|x| + 6\ln|x-1| + 3\ln|x+1| + c$;
(f) $\frac{3}{x} + 2\ln|x| + 4\ln|x-3| + c$;

10. (a) $2x + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}(1+x^2)^2 + \frac{5}{4}$;
(b) $\frac{1}{2}x\ln|\frac{x+1}{x-1}| + \frac{1}{2}\ln|\frac{x-1}{x+1}| + 1 - \frac{1}{2}\ln 3$;
(c) $e^2x + x^3 - \frac{2}{3}e^{3x} + \frac{11}{3}$

11. $b)$

12. $\frac{480}{e^2} + 200$.

13. $\frac{x^4}{4}\ln(x^2) - \frac{1}{8}x^4 + c$.

14. $x + \ln|\frac{x-1}{x+1}| + c$.

15. $a)$.

Capítulo 3

Matrizes e Determinantes

Uma matriz é um quadro de valores dispostos em filas, linhas e colunas. No contexto deste curso, tais valores serão sempre números reais. As matrizes têm aplicações em inúmeros contextos da modelação matemática de fenómenos da natureza. Neste curso, vão ser usadas na resolução de problemas traduzidos por sistemas de equações lineares, mas antes serão observadas algumas das suas propriedades algébricas.

3.1 Definição e tipos de matrizes

Definição 3.1.1. *Uma* matriz *é uma cadeia (array) rectangular de números a que chamaremos* entradas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde $a_{ij, i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}$ *são números reais, é uma matriz de entradas reais. Abreviadamente escrevemos:*

$$A = [a_{ij}]_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}.$$

Vamos representar por L_i a i-ésima linha da matriz e por C_j a sua j-ésima coluna. A uma matriz com m linhas e n colunas chamaremos matriz *do tipo* m *por* n, escrevendo *matriz* $m \times n$. Em geral, usaremos letra maiúscula para designar uma matriz e a respectiva minúscula (com índices) para as suas entradas.

Exemplo 3.1.2. *A matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ *é do tipo* 3×4.

Exemplo 3.1.3. *A matriz* $B = \left[\ -21\ \right]$ *é do tipo* 1×1.

Uma matriz com uma só coluna diz-se uma *matriz coluna* e uma matriz que só tenha uma linha é uma *matriz linha*. Uma matriz $m \times n$ com todas as entradas iguais a zero diz-se *matriz nula* e denota-se $0_{m\times n}$. Uma matriz do tipo $m \times n$ diz-se *rectangular* se $m \neq n$ e diz-se *quadrada de ordem* n se $m = n$.

Exemplo 3.1.4. *Na matriz coluna* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ *tem-se* $a_{21} = 2$.

Exemplo 3.1.5. *A matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *é quadrada de ordem* 2.

Chamamos *diagonal principal* de uma matriz quadrada de ordem n A aos elementos $a_{ii,i=1,\dots n}$.

Exemplo 3.1.6. *A diagonal principal da matriz* $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *é formada pelos elementos* $m_{11} = 1, m_{22} = 1, m_{33} = 1$.

Matriz *triangular superior* é aquela que abaixo da diagonal principal só tem 0's. Uma matriz A=$[a_{ij}]$ é triangular superior sse $a_{ij} = 0$ quando $i < j$. Matriz *triangular inferior* é aquela que acima da diagonal principal só tem 0's ou seja, uma matriz é triangular inferior se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$.

Definição 3.1.7. Matriz identidade de ordem n *(escreve-se* I_n*) é a matriz quadrada de ordem* n *que tem 1's na diagonal principal e 0's fora dela. Simbolicamente, na matriz identidade tem-se* $a_{ij} = 0$ *quando* $i \neq j$ *e* $a_{ij} = 1$ *quando* $i = j$.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz identidade de ordem 3.

Definição 3.1.8. Matriz diagonal *é aquela que fora da diagonal principal só tem 0's.* Matriz escalar *é uma matriz diagonal em que os elementos da diagonal são todos iguais.*

Exemplo 3.1.9. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *é uma matriz triangular superior e* $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *é uma matriz diagonal.*

Definição 3.1.10. *Se A for uma matriz quadrada, então o* traço de *A é a soma dos elementos da diagonal principal de A. Denota-se $tr(A)$.*

Exemplo 3.1.11. $tr\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -1+2-1=0.$

Duas matrizes A e B são iguais se e só se forem do mesmo tipo e tiverem os elementos homólogos iguais isto é, se forem do mesmo tipo e $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$.

3.2 Operações com matrizes

Soma

Se A e B forem matrizes do mesmo tipo, então a soma $A + B$ é a matriz (do mesmo tipo) que se obtém somando cada entrada de A à correspondente entrada de B. Só é possível somar matrizes do mesmo tipo. Em linguagem simbólica, se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Exemplo 3.2.1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

Propriedades 3.2.2. *Se A e B forem matrizes $m \times n$, então:*

1. $A + B = B + A$; *(comutativa)*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$; *(associativa)*
3. $A + 0 = 0 + A = A$. *(a matriz nula é o elemento neutro)*

Produto por um escalar

Se A for uma matriz e c um escalar, então o produto cA é a matriz que se obtém multiplicando c por cada entrada de A. Em linguagem simbólica, se $c \in \mathbb{R}$ e $A = [a_{ij}]$, $cA = [ca_{ij}]$.

Exemplo 3.2.3. $-2 \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

Propriedades 3.2.4. *Se A e B forem matrizes do tipo $m \times n$ e $c, d \in \mathbb{R}$, então:*

1. $c(A+B) = cA + cB$;
2. $(c+d)A = cA + dA$;
3. $c(dA) = (cd)A$;
4. $1A = A$.

Exercício 3.2.5. *Prove que, se A for uma matriz de ordem n e c for uma número real, então $tr(cA) = ctr(A)$.*

Transposição

Se A for uma matriz do tipo $m \times n$, chama-se *transposta de* A à matriz $n \times m$ que se obtém trocando as linhas e as colunas de A . Se $A = [a_{ij}]$, $A^T = [a_{ji}]$.

Exemplo 3.2.6. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Propriedades 3.2.7. *Se A e B forem matrizes do tipo $m \times n$, então:*

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
2. $\left(A^T\right)^T = A$.

Produto

Se A for uma matriz do tipo $m \times l$ e B for uma matriz do tipo $l \times n$, então o produto AB é a matriz $m \times n$ cujas entradas se obtêm do seguinte modo: a entrada da linha i e da coluna j de AB é o produto interno entre a linha i de A e a coluna j de B.

Exemplo 3.2.8. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Nota 3.2.9.
- *Só podemos multiplicar a matriz A pela matriz B se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.*
- *Em geral, o produto de matrizes* não é comutativo.

Propriedades 3.2.10. *Se A, B e C forem matrizes do tipo conveniente e $c \in \mathbb{R}$, então:*

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $A(B+C) = AB + AC$;
3. $(A+B)C = AC + BC$;
4. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$;
5. $(AB)^T = B^T A^T$.

Definição 3.2.11. *Uma matriz A diz-se* simétrica *se $A^T = A$ e diz-se* anti-simétrica *se $A^T = -A$.*

3.3 Matrizes em escada; inversa de uma matriz quadrada

Uma matriz A está em *escada de linhas* se verificar:

1. cada linha não nula está antes de todas as linhas nulas que existam;
2. se a primeira entrada não nula da linha i estiver na coluna j, todos os elementos da coluna j nas linhas seguintes são nulos;
3. a primeira entrada não nula de uma linha i não nula está numa coluna posterior à da primeira entrada não nula de todas as linhas seguintes a i.

Exemplo 3.3.1. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *é uma matriz em escada de linhas.*

A seguir apresentaremos o conceito de matriz inversa de uma matriz quadrada dada e desenvolveremos um método para determinar tal inversa (caso ela exista). Esse método, por recurso a operações elementares sobre linhas, também pode ser usado para transformar uma matriz qualquer numa matriz em escada de linhas.

Definição 3.3.2. *Se A for uma matriz quadrada de ordem n e se B for uma matriz do mesmo tipo tal que $AB = BA = I_n$, então A diz-se uma* matriz invertível *e a B chama-se* matriz inversa de A.

Definição 3.3.3. *Uma matriz que não é invertível diz-se* matriz singular.

Exemplo 3.3.4. *As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ são inversas uma da outra pois $AB = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$.*

Exemplo 3.3.5. *As matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não são inversas uma da outra pois $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \neq I_2$.*

Uma matriz invertível não pode ter mais do que uma inversa:

Exercício 3.3.6. ***(Unicidade da inversa)*** *Provar que, se B e C forem ambas inversas de uma matriz A, então $B = C$.*

Se A for uma matriz invertível, denotaremos a sua inversa por A^{-1}.
Consequentemente, $AA^{-1} = I$ e $A^{-1}A = I$.

Definição 3.3.7. *Chamamos operações elementares sobre as linhas de uma matriz A às seguintes:*

1. *troca de linhas;*
2. *multiplicação de uma linha por um escalar não nulo;*
3. *adição a uma linha de produto de outra por um escalar.*

Fazendo uso destas três operações básicas, é possível determinar a inversa da matriz (se ela existir), procedendo do seguinte modo:

- escrever a matriz $[A|I_n]$;
- usando as operações elementares sobre as linhas de $[A|I_n]$, transformar A na matriz identidade, colocando 1's na diagonal principal e 0's fora dela;
- se, no fim do processo, no lugar em inicialmente estava I_n estiver uma matriz com uma linha nula, então A não tem inversa. Caso contrário, a matriz que aparece no lugar de I_n é A^{-1}.

  Por agora, não é possível saber à partida (excepto em alguns casos) se A é ou não invertível.

Exemplo 3.3.8. *Determinemos a inversa da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$:

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & | & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & | & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2L_1 + L_2 \\ -L_1 + L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ 2L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 0 & | & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -3L_3 + L_1 \\ 3L_3 + L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad -2L_2 + L_1$$

Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Propriedades 3.3.9. *Sejam A e B matrizes de ordem n invertíveis. Então:*

1. AB *é invertível e* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
2. A^{-1} *é invertível e* $(A^{-1})^{-1} = A$;
3. *se* $c \neq 0$, cA *é invertível e* $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$;
4. A^T *é invertível e* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
5. $I_n^{-1} = I_n$.

Exercício 3.3.10. *Determinar a inversa (se existir) da matriz* $D = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$.

Definição 3.3.11. *Uma matriz quadrada invertível A tal que $A^{-1} = A^T$ diz-se uma* matriz ortogonal.

Exemplo 3.3.12. *A matriz* $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *é ortogonal:*

$$A^TA = AA^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição 3.3.13. *Chama-se* característica *de uma matriz A ao número de linhas não nulas da matriz depois de transformada em matriz em escada de linhas. Denota-se $c(A)$.*

Exemplo 3.3.14. *A característica da matriz D do exercício anterior é 2.*

3.4 Multiplicação de matrizes por blocos

Muitas vezes, no tratamento matemático de fenómenos, surgem matrizes de grande dimensão, mais fáceis de operar depois de divididas em blocos.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, o cálculo do produto AB é simplificado se se proceder do seguinte modo:

- fazer $A = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0_{1\times 2} & Z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} W & T \\ 0_{1\times 3} & U \end{bmatrix}$, sendo X, Y, Z, W, T, U os blocos correspondentes de A e B.

- $AB = \begin{bmatrix} XW & XT+YU \\ 0_{1\times 3} & ZU \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 & 4 \\ 19 & 26 & 33 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Não esquecer que a multiplicação de matrizes em blocos só é possível quando as dimensões dos blocos a multiplicar forem as ”adequadas” (número de colunas do primeiro igual ao número de linhas do segundo).

3.5 Decomposição *LU* de matrizes

Definição 3.5.1. *Uma factorização $A = LU$ de uma matriz quadrada A em que L é triangular inferior e U é triangular superior diz-se uma* factorização LU de A.

Seja A uma matriz $n \times n$ e U a correspondente matriz em escada de linhas obtida por meio de operações elementares **que não a troca de linhas**. Então, A pode ser escrita como o produto de uma matriz triangular inferior L, obtida a partir das operações elementares efectuadas sobre A, pela matriz triangular superior U. A decomposição LU de matrizes pode ser muito útil na resolução de sistemas de equações lineares.
O seguinte procedimento permite o cálculo da factorização LU de uma matriz quadrada A.

O agoritmo para a factorização LU de uma matriz A é o seguinte:

Algoritmo 3.5.2.
1. *Escrever A em escada de linhas (determinando assim U) sem efectuar trocas de linhas, anotando os multiplicadores usados para colocar 1s na diagonal e 0s abaixo dela.*

2. *Em cada entrada da diagonal de L, colocar o inverso do multiplicador usado para colocar 1 na mesma posição em U.*

3. *Em cada entrada abaixo da diagonal de L, colocar o simétrico do multiplicador usado para colocar 0 na posição correspondente em U.*

4. *Escrever a factorização $A = LU$.*

Exemplo 3.5.3. *Determinemos a factorização LU da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$:*

1. *No primeiro passo da transformação de A em escada de linhas, obtém-se a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ e a correspondente matriz elementar $E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ cuja inversa é $E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.*

2. *No segundo passo, obtém-se a matriz já em escada $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ cuja matriz elementar e respectiva inversa são $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.*

$E_1^{-1}E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ *e, assim, A pode ser escrita como o produto das matrizes triangular inferior e triangular superior:*

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note-se que as entradas da matriz L se obtêm da seguinte forma:

1. na diagonal principal encontram-se os inversos dos multiplicadores utilizados para colocar 1s na diagonal principal de A.

2. em cada posição abaixo da diagonal principal encontram-se os simétricos dos multiplicadores usados para colocar 0s na posição respectiva em A.

Exemplo 3.5.4. *Construamos agora a decomposição LU da matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$:*

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \to \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 8 & \frac{9}{2} \end{bmatrix} -9, -3 \to \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 8 & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{2}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} \end{bmatrix} -8 \to \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{2}{13}$$

Obteve-se assim a factorização

$$A = LU = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & \frac{13}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nas secções seguintes, introduziremos a função determinante que associa a cada matriz quadrada A um número real a que chamaremos *determinante de* A. Apresentaremos um método para o cálculo do determinante de uma matriz de qualquer ordem e um novo algoritmo para o cálculo da inversa de uma matriz regular, com importantes implicações na resolução de sistemas de equações lineares.

3.6 Determinante de uma matriz quadrada

Definição 3.6.1. Determinante *de uma matriz* A*, quadrada de ordem* n*, é a soma dos seus termos, sendo cada termo o produto de* n *elementos de* A *de forma a que nesse produto entre um e um só elemento de cada linha e de cada coluna. O sinal de cada termo é* $+$ *se a permutação que o origina é par e é* $-$ *se a permutação que o origina é ímpar. Escreve-se* $det(A)$ *ou* $|A|$.

Recorde-se que uma *permutação* de um conjunto com n números inteiros é um rearranjo desses números, sem repetições nem omissões.

Exemplo 3.6.2. *Há seis permutações do conjunto* $\{1, 2, 3\}$:

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1), (3, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1).$$

Diz-se que numa dada permutação há uma *inversão* sempre que um número preceda outro mais pequeno. Uma permutação é *par* se o número de inversões que nela ocorrem é par e é *ímpar* se o número de inversões for ímpar.

Exemplo 3.6.3. *Na permutação* $(1, 2, 3)$ *não há inversões mas na permutação* $(3, 1, 2)$ *há duas inversões. Na permutação* $(3, 2, 1)$ *há três inversões.*

Determinante de ordem 1:
Se $A = [a_{11}]$,, $|A| = a_{11}$.
Determinante de ordem 2:
Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, então $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.
Note-se que as permutações de $\{1, 2\}$ são $(1, 2)$ e $(2, 1)$, a primeira par e a segunda ímpar.

Determinante de ordem 3:

Os seis termos do determinante de $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ são

$$(a_{11}a_{22}a_{33}), (a_{12}a_{23}a_{31}), (a_{13}a_{21}a_{32}), (a_{13}a_{22}a_{31}), (a_{11}a_{23}a_{32}), (a_{12}a_{21}a_{33}),$$

os três primeiros positivos e os três últimos negativos. Assim,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Propriedades 3.6.4. *Sejam A e B matrizes de ordem n e c um escalar. Então:*

1. $|AB| = |A||B|$;
2. $|cA| = c^n|A|$;
3. $|A^T| = |A|$;
4. *Se A for ortogonal, então* $|A| = \pm 1$;
5. *Se A for invertível, então* $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Prova. de e)

Como $AA^{-1} = I_n$, então $|AA^{-1}| = |I_n| = 1$. Consequentemente, como $|A| \neq 0$, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

□

Exemplo 3.6.5. *1. Sendo* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$

e tem-se $|A| = 1, |B| = -23, |AB| = -23$.

Propriedades 3.6.6 (Propriedades dos determinantes)**.**

1. *Se se multiplicar uma linha ou uma coluna de uma matriz A por uma escalar c, o novo determinante é* $c|A|$;
2. *Se uma matriz A tiver uma linha ou uma coluna de zeros, então* $|A| = 0$;
3. *Se uma linha ou uma coluna de A for uma soma de parcelas, $|A|$ pode ”desdobrar-se” numa soma de determinantes;*
4. *Se se trocarem duas linhas ou duas colunas de A, o novo determinante é* $-|A|$;
5. *Se A tiver duas linhas ou duas colunas múltiplas uma da outra,* $|A| = 0$;
6. *O determinante de A não se altera se se somar a uma linha (coluna) um múltiplo de outra.*

Exemplo 3.6.7. *1.* $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ *porque a 3^a coluna é múltipla da 1^a.*

Proposição 3.6.8. *O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.*

Utilizando as propriedades dos determinantes atrás enunciadas, é possível calcular o determinante de uma matriz reduzindo-a a uma matriz triangular por meio das operações elementares já descritas:

Exemplo 3.6.9. *Vamos calcular* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ *usando propriedades dos determinantes para transformar a matriz dada numa matriz triangular superior:*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad L_1 + L_2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad L_1 + L_3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad L_2 + L_3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} .$$

Como as propriedades aplicadas não afectam o valor do determinante, ele é igual a

$$1 \times (-2) \times 3 = -6$$

Exercício 3.6.10. *Prove, recorrendo às propriedades dos determinantes, que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

3.7 Teorema de Laplace; Cálculo de A^{-1} a partir de $adj(A)$

O Teorema de Laplace fornece-nos um algoritmo para o cálculo de determinantes de qualquer ordem.

Definição 3.7.1. *Se A for uma matriz quadrada de ordem n, chama-se* menor associado à entrada a_{ij} *ao determinante da submatriz que se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j. Denota-se M_{ij}.*

Ao número $(-1)^{i+j}M_{ij}$ chama-se complemento algébrico ou cofactor associado a a_{ij}. *Escreve-se C_{ij}.*

Exemplo 3.7.2. *Se* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, *tem-se* $M_{22} = 28$ *e* $c_{12} = (-1)^3 \times 10 = -10.$

Teorema 3.7.3 (Teorema de Laplace)**.** *O determinante de uma matriz A de ordem n é igual à soma dos produtos das entradas de qualquer linha ou coluna pelos respectivos cofactores.*

Exemplo 3.7.4.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0$$

$$= 2(2+2) - (2+1) = 8 - 3 = 5.$$

De seguida apresentaremos um método para o cálculo da inversa de uma matriz, recorrendo ao cálculo do determinante. Terminaremos este capítulo introduzindo com um importante critério para a invertibilidade de uma matriz quadrada.

Definição 3.7.5. *Se A for uma matriz de ordem n, à transposta da matriz dos cofactores de A chama-se* matriz adjunta de A. *Denota-se por $adj(A)$.*

Exemplo 3.7.6.

$$adj \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

$C_{11} = 12, C_{12} = 6, C_{13} = -16, C_{21} = 4, C_{22} = 2, C_{23} = 16, C_{31} = 12, C_{32} = -10, C_{33} = 16.$

Teorema 3.7.7. *Seja A uma matriz invertível. Então,*

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}.$$

Exemplo 3.7.8. *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. *Determinemos* A^{-1} : *Comecemos por calcular* $|A|$. $|A| = 27 - 32 - 18 + 20 + 16 - 15 = -2$. *Determinemos agora* $adj(A)$.

$$adj(A) = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5/-2 & -1/-2 & 1/-2 \\ 2/-2 & 4/-2 & -2/-2 \\ 1/-2 & -3/-2 & 1/-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.7.9. *Uma matriz quadrada é invertível sse o seu determinante for diferente de zero.*

3.8 Exercícios propostos

1. Considere as matrizes:

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{E} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{D} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{F} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Calcule, se for possível:

   (a) $B + E, C + E, A + B, D + F$

   (b) $D - F, A - B$

   (c) $-3C, 3D + 2F, 2B - 4E$

   (d) $2(D + F) - 2D - 2F$

   (e) $A^T, (A^T)^T$

   (f) $(C + E)^T, C^T, E^T$

   (g) $E - E^T, E + E^T, (E + E^T)^T$

2. (a) Determine x sabendo que $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $AB = 17$.

   (b) Calcule AB e BA, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Que linhas, colunas ou matrizes é preciso multiplicar para calcular:
   (a) a 3ª coluna de AB?
   (b) a primeira linha de AB?
   (c) a entrada da 3ª linha e 4ª coluna de AB?
   (d) a entrada da 1ª linha e 1ª coluna de ABC?

4. As vendas mensais (em milhares de unidades) de CDs e de filmes em DVD de três lojas L1, L2 e L3 são descritas na tabela seguinte:

Janeiro

	L1	L2	L3
CD	37	28	18
DVD	33	19	10

Fevereiro

	L1	L2	L3
CD	27	12	7
DVD	22	8	3

   (a) Escreva duas matrizes 2×3, A e B, representando as vendas em Janeiro e em Fevereiro.
   (b) Escreva a matriz que representa o total das vendas nos dois meses.
   (c) Escreva a matriz que representa a diferença entre as vendas dos dois meses.

5. Considere as matrizes:

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{D} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Calcule, se for possível:

   (a) AC, CA
   (b) $CB, (CB)^T, C^TB^T, B^TC^T$
   (c) $A(BD), (AB)D$
   (d) $AC + AE, A(C + E)$.

6. (a) Seja $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. Prove que $A^2 = (a+d)A - (ad - bc)I_2$.

   (b) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Prove que $A^2 = 2A - I_2$.

7. Determine para que matrizes 2×2 A e B são válidas as igualdades:

   (a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

   (b) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

8. Transforme as seguintes matrizes em matrizes em escada de linhas e determine a sua característica:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

   (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

   (c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

   (d) $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. Discuta a característica das seguintes matrizes em função do parâmetro real α.

   (a) $A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 3 \\ 4 & -\alpha & -1 \\ \alpha & -1 & -4 \end{bmatrix}$

   (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 2 \\ \alpha & 4 & 2 \end{bmatrix}$

10. Obtenha a factorização LU de cada uma das seguintes matrizes:

    (a) $= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

    (b) $= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

    (c) $= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

    (d) $= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

11. O que acontece à factorização LU de uma matriz com um zero numa posição de *pivot*?

12. Verifique se a matriz $U = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ -0,25 & 0,25 \end{bmatrix}$ é inversa de alguma das matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

13. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
    (a) Calcule S^{-1}.
    (b) Calcule $B = SAS^{-1}$
    (c) Mostre que $A^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{bmatrix}$.
14. Determine, caso exista, a inversa de cada uma das seguintes matrizes:
    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
    (b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
    (c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
    (d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
15. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes e diga quais delas são invertíveis:
    (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
    (b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$
    (c) $C = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 2 & a \end{bmatrix}$
    (d) $D = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
    (e) $E = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & 5 & 3 \\ \frac{1}{4} & 4 & 0 & -\frac{2}{3} & 2 \\ -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \end{bmatrix}$
    (f) $F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
16. Utilize propriedades dos determinantes para calcular:
    (a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
    (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

17. Determine os valores do escalar $\lambda \in$ R para os quais a matriz $A - \lambda I$ é singular, sendo:

    (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

    (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

18. Resolva a equação $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$.

19. Determine as matrizes adjunta e inversa de:

    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

    (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

    (c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$

    (d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

    Como poderia provar, antes de ter calculado A^{-1} e B^{-1}, que A e B não são inversas uma da outra?

20. Prove que se uma matriz A é ortogonal, então $|A| = \pm 1$.

21. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, resolva as seguintes equações:

    (a) $2A - X = B^{-1}$

    (b) $CX + B = BX + C$

    (c) $A^T - A^{-1} = (A + B + C)^T + X$

22. Sempre que seja possível, dê exemplos de matrizes quadradas A e B nas condições indicadas. Se não for possível, indique porquê.

(a) $A^2 = 0 \wedge A \neq 0$

(b) $A^2 = -I$

(c) $AB = 0 \wedge BA \neq 0$

23. Sejam A e B matrizes do tipo 4×5, C uma matriz do tipo 5×4 e D uma matriz do tipo 4×2. Determine quais das seguintes expressões matriciais estão bem definidas, e nesses casos, indique a dimensão da matriz resultante.

    (a) $(A^T + C)D$.

    (b) $C^T(A + B)^2$

    (c) $(A^T + C)(A^T + C)^T$

24. Sejam A, B e C matrizes quadradas da mesma ordem. Diga se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira diga porquê, se for falsa dê um contra-exemplo.

    (a) Se $AB = 0$, então tem-se necessariamente $A = 0$ ou $B = 0$.

    (b) $(AB)^2 = A^2B^2$.

    (c) Se a primeira e terceira colunas de B são iguais o mesmo acontece à primeira e terceira colunas de AB.

    (d) Se a primeira e terceira linhas de B são iguais o mesmo acontece à primeira e terceira linhas de AB.

    (e) Se A e B são invertíveis, então $A + B$ também é.

    (f) Se $AB = AC$ e A tem inversa, então $B = C$.

    (g) Se A tem inversa, então A^2 também tem.

25. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ 1 & k & 4 \\ 1 & 4 & k \end{bmatrix}$

    (a) Sem efectuar qualquer cálculo, diga o que se pode concluir quanto ao valor da característica de A quando $k = 4$.

    (b) Determine k de modo que a matriz seja regular.

26. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcule os seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 6 & 3 & 0 \\ -1/2 & -1 & -1/2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3a+1 & 3b+2 & 3c+1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+2 & 2b+1 & 2c \\ a+1 & b+2 & c+1 \end{vmatrix}$

Capítulo 4

Sistemas de equações lineares

O objecto de estudo deste capítulo, sistemas de equações lineares, é, de entre os que abordaremos neste curso, um dos mais interessantes e ricos em aplicações. Introduziremos alguma terminologia e apresentaremos dois métodos para a resolução de sistemas.

4.1 Classificação de sistemas de equações lineares quanto à existência de soluções

Uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

onde$a_1, a_2, ..., a_n$ são números e $x_1, x_2, ..., x_n$ são incógnitas diz-se uma *equação linear*. Se $b = 0$, a equação diz-se *homogénea*. Um *sistema de equações lineares* ou *sistema linear* é uma conjunção de equações lineares. Um *sistema homogéneo de equações lineares* é uma conjunção de equações lineares homogéneas.

Exemplo 4.1.1. $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ *é um sistema de equações lineares mas* $\begin{cases} x^2 - y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ *não é (por causa do termo* x^2*).*

Exemplo 4.1.2. $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ *é um sistema homogéneo.*

Definição 4.1.3. *Um sistema linear que não tenha soluções diz-se* impossível*. Um sistema com pelo menos uma solução, diz-se* possível*. Se tal solução for única, o sistema diz-se* possível e determinado*; se existir mais do que uma solução, o sistema diz-se* possível e indeterminado.

Todo o sistema de equações lineares está em uma e só uma das seguintes situações:

1. não tem solução;
2. tem uma e uma só solução;
3. tem uma infinidade de soluções.

Exemplo 4.1.4. *O sistema* $\left\{\begin{array}{c} -x-y+z=1 \\ x+y-z=0 \end{array}\right.$ *é impossível. Já o sistema* $\left\{\begin{array}{c} -x-y+z=1 \\ x+y-z=-1 \\ -x+y=0 \end{array}\right.$ *é possível e determinado.*

Exercício 4.1.5. *Um sistema homogéneo é sempre possível. Porquê?*

4.2 Forma matricial de um sistema de equações lineares

As matrizes são particularmente úteis na simplificação da escrita e na resolução de sistemas de equações e as propriedades do cálculo matricial podem ser usadas nessa resolução. Consideremos um sistema de equações lineares genérico com m equações e n incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. .$$

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Por definição de multiplicação de matrizes, podemos reescrever o sistema de equações na forma

$$AX = B,$$

designada de *forma matricial do sistema*.
À matriz A chama-se matriz dos coeficientes ou *matriz simples do sistema*, X é a matriz das incógnitas e B é a coluna dos *termos independentes*.
Se $B \neq \mathbf{0}$, o sistema diz-se homogéneo.

Chamamos *matriz ampliada do sistema*, à matriz $[A|B]$, especificamente

$$[A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & | & b_2 \\ ... & ... & | & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & | & b_m \end{bmatrix}.$$

Em geral, se um sistema de equações lineares tiver m equações e n incógnitas, então a sua matriz simples será do tipo $m \times n$ e a sua matriz ampliada será $m \times (n+1)$.

Definição 4.2.1. *Dois sistemas de equações lineares dizem-se* equivalentes *se tiverem o mesmo conjunto solução.*

4.3 Resolução de sistemas através da inversa da matriz dos coeficientes

Consideremos o sistema escrito na forma matricial $AX = B$. Se A é uma matriz invertível, podemos escrever

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

e então, determinar a solução do sistema corresponde a multiplicar duas matrizes. Naturalmente, este método só se aplica se a matriz dos coeficientes for quadrada e admitir inversa. Claro que tal acontece somente se o sistema for possível e determinado.

Exemplo 4.3.1. *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases},$$

através da inversa da matriz dos coeficientes.

Solução. A matriz dos coeficientes é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e a sua inversa é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

□

4.4 Resolução de sistemas pela regra de Cramer

A fórmula que se segue fornece uma técnica muito útil para a resolução de sistemas de solução única.

Teorema 4.4.1 (Regra de Cramer)**.** *Seja $AX = B$ um sistema de n equações lineares com n incógnitas tal que $|A| \neq 0$. Então, o sistema tem uma só solução que pode ser obtida do seguinte modo:*

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, ..., x_n = \frac{|A_n|}{|A|}.$$

sendo A_i a matriz que se obtém de A substituindo a coluna i pela coluna das soluções.

Exemplo 4.4.2. *Apliquemos a Regra de Cramer para resolver o sistema*

$$\begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ x + y = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

A matriz simples do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é igual a -3. Continuando a aplicar a Regra de Cramer:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

e

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Consequentemente, a solução do sistema é

$$(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -3).$$

4.5 Método de eliminação de Gauss

As técnicas subjacente à resolução de um sistema de equações lineares vão sempre no sentido de determinar sistemas equivalentes ao dado, mas mais simples, até podermos identificar o seu conjunto solução.
O método de eliminação de Gauss, passa por considerar a matriz ampliada do sistema

$$[A|B]$$

e por aplicação das operações elementares sobre matrizes (ver Definição 3.3.7). Tais operações transformam a matriz ampliada numa matriz em escada de linhas e esta representa um sistema equivalente ao primeiro, embora mais simples.
Isto corresponde à troca de equações, à multiplicação de equações por um número diferente de zero e à substituição de uma equação pela soma de outras duas. Todas estas operações transformam o sistema em outros sistemas equivalentes.

Exemplo 4.5.1. *O sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

é equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ -8y + 15z = 23 \\ -y + 3z = 4 \end{cases}$$

(multiplicou-se a 1ª linha por -3 e somou-se à 2ª, multiplicou-se a 1ª linha por -1 e somou-se à 3ª) que por sua vez é equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ -8y + 15z = 23 \\ -9z = -9 \end{cases}$$

(multiplicou-se a 3ª linha por -8 e somou-se à 2ª)

Obtém-se assim um sistema equivalente ao inicial cuja resolução é muito simples, começando-se com a 3ª equação , resolvendo depois a 2ª e, por fim, a 1ª . A sua solução é:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} .$$

Note-se que sistemas de equações lineares cuja matriz simples é triangular são muito fáceis de resolver. Concentremo-nos então em transformar a matriz inicial do sistema numa matriz triangular superior ou em escada de linhas usando operações elementares.

Vamos traduzir para a linguagem do cálculo matricial os cálculos efectuados na resolução do sistema do exemplo anterior. A sua matriz ampliada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & | & -4 \\ 3 & -2 & 3 & | & 11 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

As operações elementares efectuadas sobre as equações do sistema correspondem a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & | & -4 \\ 0 & -8 & 15 & | & 23 \\ 0 & -1 & 3 & | & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & | & -4 \\ 0 & -8 & 15 & | & 23 \\ 0 & 0 & -9 & | & -9 \end{bmatrix}$$

tendo-se obtido uma matriz em escada que corresponde ao sistema de muito fácil resolução

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ -8y + 15z = 23 \\ -9z = -9 \end{cases}$$

cuja solução é

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1. \end{cases}$$

Em vez de escrever o sistema a resolver, é mais simples efectuar operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada que lhe corresponde, até se obter uma matriz triangular ou em escada. Quando essa matriz for determinada, deve-se escrever o sistema correspondente e resolvê-lo. Este é o *método de eliminação de Gauss* cujo algoritmo pode ser resumido como se segue:

1. escrever a matriz ampliada do sistema;

2. transformá-la numa matriz triangular superior ou em escada de linhas recorrendo a operações elementares;

3. escrever o novo sistema correspondente a tal matriz;

4. resolver esse sistema.

Exercício 4.5.2. *Resolver o sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + y = 2 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

usando o método de eliminação de Gauss.

O *método de eliminação de Gauss-Jordan* acrescenta um passo ao algoritmo anterior:

5. começando na última linha não nula e fazendo os cálculos regressivamente, usar cada pivot para transformar em zero os elementos da respectiva coluna.

(transformar em zero todos os elementos da matriz simples que estejam fora da ”diagonal”).

4.6 Discussão de sistemas de equações lineares

Vamos agora classificar os sistemas de equações lineares quanto à existência de solução, por observação do número de incógnitas e das características das matrizes dos coeficientes e ampliada do sistema. Para isso, lembramos que a característica de uma matriz A, $c(A)$, é o número de linhas não nulas da matriz triangular ou em escada de linhas que se obtém de A por meio de operações elementares. Ao processo de transformação de uma matriz em matriz triangular ou em escada recorrendo a operações elementares chama-se *condensação*.

Teorema 4.6.1. *Um sistema de equações lineares é possível somente se a característica da matriz dos coeficientes e a característica da matriz ampliada do sistema, coincidirem. O sistema é possível e determinado, caso as características das matrizes dos coeficientes e ampliada, coincidam com o número de incógnitas do sistema.*
O sistema é possível e indeterminado, quando as características das matrizes dos coeficientes e ampliada coincidem, sendo o número de incógnitas do sistema superior a esse valor.

Dado um sistema de equações lineares $AX = B$ com n incógnitas, pelo teorema anterior temos um dos seguintes casos:

1º caso $c(A) < c(A|B)$ sistema impossível;

2º caso $c(A) = c(A|B) < n$ sistema possível e indeterminado;

3º caso $c(A) = c(A|B) = n$ sistema possível de solução única.

Exemplo 4.6.2. *Vamos analisar o sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} 2x + y + z &= 1 \\ x + 2y - z &= 0 \\ x - y + \alpha z &= 2 \end{cases}$$

em função do parâmetro α, começando por condensar a sua matriz ampliada:

$$A = \left[\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 1 & -1 & \alpha & | & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & -2\alpha + 1 & | & -3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & -2\alpha + 4 & | & -2 \end{array}\right].$$

A característica de $[A|B]$ será igual a:

(i) 3 se $\alpha \neq 2$;

(ii) 2 se $\alpha = 2$.

Consequentemente, o sistema será

(i) possível e determinado $c(A) = 3 = m = n$ se $\alpha \neq 2$;

(ii) impossível $c(A) = 2 < m$ se $\alpha = 2$.

Já foi visto que um sistema homogéneo $AX = 0$ é sempre possível(admite sempre a solução nula). Tal sistema será indeterminado se e só se $c(A) < n$.

4.7 Exercícios propostos

1. Identifique as equações que são lineares nas respectivas variáveis:

   (a) $x_1 + 7^{-1/3}x_2 - \sqrt{5}x_3 = 1$

   (b) $5x + xy - z = 0$

   (c) $u = -\pi v + \frac{2}{3}w - \sqrt{3}z$

   (d) $x^{2/5} + 8y - 5z = 7^{1/2}$

2. Considere o $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y & = & 8 \\ 4x+y & = & 7 \end{array}\right.$. Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira:

   (a) O sistema é impossível.

   (b) A solução é $(2,-1)$.

   (c) A solução é a recta $y=2$.

   (d) As equações são equivalentes.

3. Dado um sistema de 2 equações a 2 incógnitas, qual das seguintes afirmações é verdadeira:

   (a) O sistema não tem solução.

   (b) O gráfico do(s) ponto(s) da solução é a intersecção dos gráficos das equações.

   (c) O gráfico da solução é a intersecção do eixo dos xx com os gráficos das equações.

   (d) Existe um par ordenado (x,y) que satisfaz ambas as equações.

4. Qual dos gráficos dos seguintes sistemas é um par de rectas paralelas:

   (a) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y & = & 7 \\ 4y & = & 6x-14 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{rcl} x-2y & = & 7 \\ 3x & = & 4+6y \end{array}\right.$

   (c) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 7 \\ 3x-2y & = & 6 \end{array}\right.$ (d) $\left\{\begin{array}{rcl} 5x+y & = & 1 \\ 7y & = & 3x \end{array}\right.$

5. Qual dos seguintes sistemas corresponde à matriz de coeficientes: $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y & = & -1 \\ y & = & 5 \\ 2x & = & 1 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x & = & 2 \\ 2x+y & = & 0 \\ -x+5y & = & 1 \end{array}\right.$

   (c) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2z & = & 10 \\ 2x+y & = & 0 \\ -x+5y+z & = & 5 \end{array}\right.$ (d) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y-z & = & -3 \\ y+5z & = & 15 \\ 2x+z & = & 3 \end{array}\right.$

6. Considere o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 3 \\ 2x+2y+2z & = & 6 \\ 3x+3y+3z & = & 10 \end{array}\right.$$

   Identifique qual das afirmações seguintes é verdadeira.

(a) Existe uma única solução $x = 1, y = 1, z = 1$.

(b) O sistema é impossível.

(c) Existe um número infinito de soluções.

7. Resolva os sistemas de equações lineares:

(a) usando a matriz A^{-1}

(b) por eliminação de Gauss

(c) usando a Regra de Cramer

i. $\begin{cases} x - y = 4 \\ -4x + 2y = 6 \end{cases}$ ii. $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 5x + 7y = 4 \end{cases}$ iii. $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 2x - 8y = 8 \end{cases}$

iv. $\begin{cases} 2x - 8y = 6 \\ -3x + 12y = -9 \end{cases}$ v. $\begin{cases} 6x + y = 3 \\ -4x - y = 8 \end{cases}$ vi. $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

8. Encontre a e b de modo que o sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ ax - by = c \end{cases}$ tenha solução única.

9. Encontre a e b de modo que o sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + ay = c \end{cases}$ tenha uma infinidade de soluções.

10. Determine a, b, c e d, de modo que o sistema $\begin{cases} ax - by = c \\ bx + ay = d \end{cases}$ não tenha solução.

11. Resolva cada um dos sistemas de equações lineares utilizando o Método de Eliminação de Gauss:

(a) $\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} -2y + 3z = 1 \\ 3x + 6y - 3z = -2 \\ 6x + 6y + 3z = 5 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 1 \\ 8x + y + 4z = -1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 0 \\ w - y - 3z = 0 \\ 2w + 3x + y + z = 0 \\ -2w + x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$

12. Usando a Regra de Cramer, resolva o sistema de equações lineares $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \\ x + 2y + 4z = 3 \end{cases}$.

13. Discuta o seguinte sistema em função do parâmetro α:

$$\begin{cases} x+z+w &= 1 \\ \alpha x+y-w &= 0 \\ x-y+\alpha w &= 1 \\ \alpha x+y+\alpha z &= 1/2 \end{cases}$$

14. Determine os valores de α para os quais o sistema

$$\begin{cases} 2x+y+z &= 1 \\ x+2y-z &= 0 \\ x-y+\alpha z &= 2 \end{cases}$$

    (a) não tem solução
    (b) tem solução única. Calcule-a para $\alpha = 0$.

15. Determine o valor de λ para o qual o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x-5y+2z &= 0 \\ x+y+z &= 0 \\ 2x+\lambda z &= 0 \end{cases}$$

tem soluções distintas da trivial e calcule-as.

16. Discuta os sistemas de equações seguintes em função do(s) parâmetro(s):

(a) $$\begin{cases} x+2y+3z &= 0 \\ 2x-y+z+5t &= 0 \\ 3x+y+4z+at &= 1 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 3x-11y+az &= 0 \\ x-2y+2z &= 0 \\ 3x+4y-14z &= 0 \\ 2x+y-2z &= 0 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} 2x-y+z &= 0 \\ x+2y+2z &= 0 \\ ax+3y-3z &= 0 \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} x+ay+bz &= 1 \\ a(b-1)y &= a \\ x+ay+z &= b^2 \end{cases}$$

(e) $$\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2x+y+3z &= 2 \\ 3x+2y-z &= 0 \\ x+y+z &= a \end{cases}$$

(f) $$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x+ay+2z+3t &= 0 \\ x+y+az+4t &= 0 \\ x+y+z+at &= 0 \end{cases}$$

(g) $\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2x-y+z &= 2 \\ x-2y+3z &= 3 \\ 2x-y+az &= b \end{cases}$ (h) $\begin{cases} 2x+3y-z &= b \\ x-y &= 1 \\ 5y+az &= -b \end{cases}$

17. Um zoo tem pássaros e animais selvagens de quatro patas. Se o zoo contêm 60 cabeças e 200 patas. Quantos pássaros e quantos animais selvagens vivem no zoo?

18. Numa gelataria vendem-se gelados e batidos. Um gelado é composto por uma medida de xarope e 4 bolas de gelado e o batido por uma medida de xarope e 3 bolas de gelado. Se a loja gasta por dia 4 baldes de gelado e 5 garrafas de xarope por dia, quantos gelados e quantos batidos vende? (1 garrafa de xarope $= 32$ medidas e 1 balde de gelado $= 128$ bolas).

19. A Companhia de Porcelana do Centro produz em cerâmica copos e taças para molhos. Para a produção de cada peça são necessários alguns materiais de custo fixo. Para cada copo esse custo é 25 cêntimos e para cada taça 20 cêntimos. Um trabalhador precisa, em média, 3 minutos para a produção do copo e 2 minutos para a produção da taça, pois todo o processo é executado por uma máquina. Se são gastos 44 euros por dia em material para a produção de copos e taças para molhos. Quantos copos e taças para molho podem ser fabricadas em 8 horas de trabalho gastando exactamente 44 euros de material?

20. Uma unidade de torrefação está interessada em testar uma mistura de três tipos de grão para obter um lote final de $4500kg$ com um custo de 17500 euros. O primeiro tipo de grão custa $4,50euros/kg$, enquanto que o segundo custa $4,90euros/kg$ e o terceiro $3,55euros/kg$. Na confecção de um lote é necessário que as quantidades utilizadas do primeiro e segundo tipos de grão sejam iguais. Verifique se é possível obter o lote anteriormente referido.

21. Um agente dos serviços secretos sabe que 60 aviões estão estacionados num aeroporto secreto. O agente pretende descobrir quantos destes 60 aviões são aviões de guerra e quantos são bombardeiros. Ele sabe ainda que foram encomendados 250 mísseis para carregar os aviões. Cada avião de guerra transporta 6 desses mísseis e cada bombardeiro apenas 2 mísseis. Sabe-se ainda que o número de aviões corresponde ao dobro do número de bombardeiros. Qual o número de aviões de guerra e de bombardeiros estacionados no aeroporto secreto?

22. Um turista acabou de regressar da Europa. Sabe-se que gastou em diária 30 euros na Inglaterra, 20 em França e 20 em Espanha. Para a alimentação gastou diariamente 20 euros em Inglaterra, 30 euros em França e 20 euros em Espanha. Gastou ainda diariamente 10 euros em despesas extras. No total o turista gastou 340 euros em hospedagem, 320euros em alimentação e 140 euros em despesas extras. Pretende-se determinar o número de dias que o turista esteve em cada país.

23. Considere o sistema $\begin{cases} 2x - y + 3z &= a \\ 3x + y - 5z &= b \\ -5x - 5y + 21z &= c \end{cases}$

    Mostre que o sistema é impossível se $c \neq 2a - 3b$.

24. Considere o sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z &= a \\ x - y + 5z &= b \\ 3x + 7y - 5z &= c \end{cases}$

    Encontre as condições sobre a, b e c tais que o sistema seja possível.

25. Seja A uma matriz regular de ordem n. Prove que os sistemas de n equações a n incógnitas, $AX = B$ e $A^{-1}X = C$ posuem a mesma solução se e só se $B = A^2C$.

26. Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ -\alpha x + 2y &= 2 \\ 2x + y - z &= \beta \end{cases}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

    (a) Deternine os valores de α e β para os quais $(x, y, z) = (1, 1, -1)$ é solução do sistema.

    (b) Discuta o sistema em função dos parâmetros reais α e β.

    (c) Considre $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ e determine, utilizando a regra de Cramer, o valor de y.

27. Uma companhia produz três produtos, sendo cada um deles processado através de três departamentos diferentes. A tabela seguinte sintetiza as horas requeridas, para a produção de uma unidade de cada artigo, em cada departamento.

Departamento		Produto		Horas disponíveis por semana
	1	2	3	
A	2	$3,5$	3	1200
B	3	$2,5$	2	1150
C	4	3	2	1400

Além disso, a capacidade semanal de produção, isto é, a produção máxima que cada departamento pode atingir, trabalhando em condições normais, com o equipamento existente, para cada departamento, é indicada em horas disponíveis. Pretende-se determinar se existem combinações de produção dos três itens para as quais se esgotem as capacidades semanais dos três departamentos.

4.7.1 Soluções

1. a) b) e c).
2. b).
3. b).
4. a) e b).
5. d).
6. b).
7. (a)
   (b)
   (c) i. $(5, 1)$.
      ii. $(17/19, 23/19)$.
      iii. $(12/7, -11/7)$.
      iv. $(0, -3/4)$.
      v. $(11/2, -30)$.
      vi. $(0, 0)$.
8. $(c/a, 0)$, para $a \neq 0$ e $b \neq 0$.
9. $a = b$ ou $a = -b$.
10. $d \neq c \bigwedge (a = b \bigvee a = -b)$.
11. (a) $S = \{(3, 1, 2)\}$.
    (b) $S = \{(\frac{1-3z}{7}, \frac{-4z+1}{7}, z) : z \in IR\}$.
    (c) $S = \{\}$.
    (d) $S = \{(x, -x, 0, -x) : x \in IR\}$.
12. $S = \{(1, -1, 1)\}$
13. Se $\alpha = 1$, o sistema é possível indeterminado; se $\alpha \neq 1$, o sistema é possível determinado.
14. (a) O sistema não tem solução para $\alpha = 2$;
    (b) O sistema tem solução única para $\alpha \neq 2$
15. O sistema é indeterminado se $\lambda = 2$. Neste caso, $S = \{(x, 0, -x)\}$.

16. (a) Se $a = 5$, o sistema é ímpossível; se $a \neq 5$ o sistema é possível determinado.
    (b) O sistema é possível de solução única para qualquer valor de a.
    (c) Se $a = -6$, o sistema é índeterminado; se $a \neq -6$ o sistema é possível determinado.
    (d) Se $a = 0$, o sistema é indeterminado, para qualquer valor de b; se $a \neq 0$ e $b = 1$, então o sistema é ímpossível; se $a \neq 0$ e $b \neq 1$, então o sistema é possível determinado.
    (e) Se $a = 3$, o sistema é possível determinado; se $a \neq 3$ o sistema é ímpossível.
    (f) Se $\alpha \neq 1$, o sistema é possível determinado; se $\alpha = 1$ o sistema é possível indeterminado.
    (g) Se $a \neq 1$, o sistema é possível determinado, para qualquer valor de b; se $a = 1$ e $b \neq 2$, o sistema é ímpossível; Se $a = 1$ e $b = 2$, então o sistema é indeterminado.
    (h) Se $a \neq -1$, o sistema é possível determinado, para qualquer valor de b; se $a = 1$ e $b \neq 1/2$, o sistema é ímpossível; Se $a = 1$ e $b = 1/2$, então o sistema é indeterminado.
17. 20 aves e 40 animais com quatro patas.
18. 92 gelados e 68 batidos.
19. 120 copos e 80 taças.
20. Obtemos o referido lote se utilizarmos, aproximadamente, 793 Kg do primeiro e do segundo tipo de grão e 2914 Kg do terceiro tipo de grão.
21. 40 aviões de guerra e 20 bombardeiros.
22. O turista esteve 6 dias em Inglaterra, 4 dias em França e 4 dias em Espanha.
23.
24. O sistema é possível determinado para quaisquer valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$.
25.
26. (a) $\alpha = 0$ e $\beta = 4$.
    (b) Se $\alpha \neq -3$, o sistema é possível determinado, para qualquer valor de β; se $\alpha = -3$ e $\beta \neq 1$, o sistema é ímpossível; Se $\alpha = -3$ e $\beta = 1$, então o sistema é indeterminado.
    (c) $y = -2/5$.

27. Deverão ser produzidos 200 artigos do produto 1, 100 artigos do produto 2 e 150 artigos do produto 3.

Bibliografia

[1] R., Harshbarger e J., Reynolds, *Matemática Aplicada*,Administração, Economia e Ciências sociais e Biológicas, McGraw-Hill (2006).

[2] J, Silva, *Princípios da Análise Matemática Aplicada*, McGraw-Hill.

[3] T, Apostol, *Cálculo*, volume 1, Editorial Reverte (1994).

[4] G, Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Harcourt Brace Jovanovich College Publishers (1986).

[5] E., Giraldes, M Smith e V., Fernandes, *Álgebra linear e Geometria Analítica*, McGraw- Hill (1995).

[6] L., Magalhães, *Álgebra Linear como Introdução à Matemática Aplicada*, Texto Editora (1989).